Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2016/17

Lösungen Übungsblatt 2 Ökonometrie

Aufgabe 1) a)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\,d\varphi\, r\,dr \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ 2\pi\, e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\infty} \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

b) Substituiere $y := \frac{x-\mu}{\sigma}$, $dy = dx/\sigma$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \;=\; 1$$

Aufgabe 2) Es sei

$$p_{\mu,\sigma}(x) \;:=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

a) Die Aussage " der Erwartungswert von ϕ ist μ " ist äquivalent zu

$$\mathsf{E}[\phi] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \phi\, p_{\mu,\sigma}(\phi)\,d\phi \;=\; \mu\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \phi\, p_{\mu,\sigma}(\phi)\,d\phi &= \int_{-\infty}^{\infty} (\phi-\mu+\mu)\, p_{\mu,\sigma}(\phi)\,d\phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(\phi-\mu)e^{-\frac{(\phi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,d\phi \;+\; \mu\times 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx \;+\; \mu \;=\; \mu\,,\end{aligned}$$

das Integral ist 0 da der Integrand eine ungerade Funktion ist.

b) Die Aussage " die Varianz von ϕ ist σ^2 " ist äquivalent zu

$$\mathsf{V}[\phi] \;=\; \mathsf{E}\big[(\phi - \mathsf{E}[\phi])^2\big] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} (\phi-\mu)^2\, p_{\mu,\sigma}(\phi)\, d\phi \;=\; \sigma^2 \,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\phi-\mu)^2\, p_{\mu,\sigma}(\phi)\, d\phi \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\phi-\mu)^2\, e^{-\frac{(\phi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, d\phi \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2\, y^2\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \;=\; \sigma^2 \end{aligned}$$

denn mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \times y\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ y \times (-e^{-\frac{y^2}{2}})\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-e^{-\frac{y^2}{2}})\, dy \right\} \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \;=\; 1 \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3a) Mit $y = \sqrt{\alpha}\, x$ und $q = k/\sqrt{\alpha}$ haben wir

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{k^2}{2}} \\ \Leftrightarrow\quad & \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqy}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \;=\; e^{-\frac{q^2}{2}} \\ \Leftrightarrow\quad & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2-2iqy-q^2}{2}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-iq)^2}{2}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(y-iq)^2}{2}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 1 \end{aligned}$$

Wir betrachten den geschlossenen Weg

$$C \;=\; C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$

in der komplexen Ebene, der aus den Strecken-Abschnitten

$$\begin{aligned} C_1 &= [-R-iq, R-iq] \\ C_2 &= [R-iq, R] \\ C_3 &= [R, -R] \\ C_4 &= [-R, -R-iq] \end{aligned}$$

besteht. Dann müssen wir zeigen:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} e^{-\frac{z^2}{2}}\, \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 1$$

Da $f(z) = e^{-z^2/2}$ eine holomorphe Funktion ist, ist das Integral über jeden geschlossenen Weg in der komplexen Ebene gleich 0. Wenn wir also zeigen können, dass die Integrale über C_2 und C_4 nach 0 konvergieren, haben wir

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} &= -\lim_{R\to\infty} \int_{C_3} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \\
&= -\lim_{R\to\infty} \int_{R}^{-R} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1
\end{aligned}$$

und wir sind fertig. Nun ist

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\right| &= \left|\int_{-q}^{0} e^{-\frac{(R+it)^2}{2}}\, i\, dt\right| \\
&= \left|\int_{-q}^{0} e^{-\frac{R^2+2itR-t^2}{2}}\, dt\right| \\
&\leq e^{-\frac{R^2}{2}} \left|\int_{-q}^{0} \left| e^{itR}\, e^{\frac{t^2}{2}} \right| dt\right| \\
&\leq e^{-\frac{R^2}{2}}\, e^{\frac{q^2}{2}} \left|\int_{-q}^{0} dt\right| \\
&\leq e^{-\frac{R^2}{2}}\, e^{\frac{q^2}{2}}\, |q| \overset{R\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

und der Beweis für das Integral über C_4 ist analog. ■