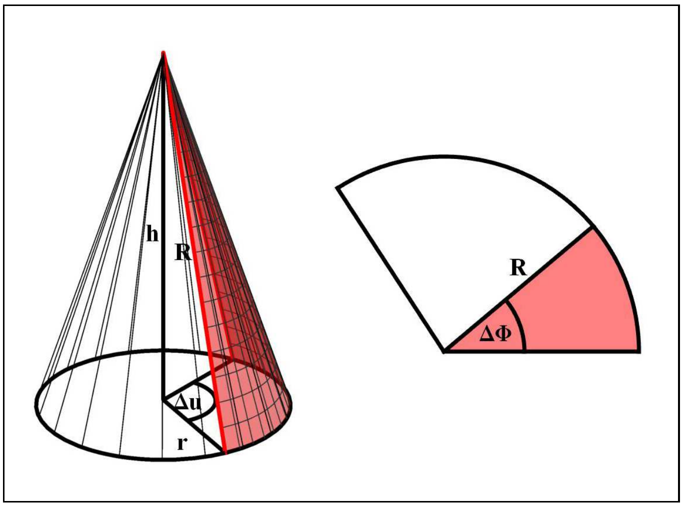
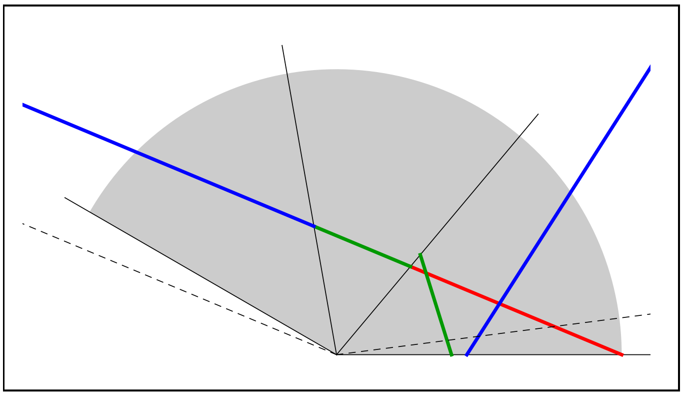
7. Lösung zur Differentialgeometrie: Exponentialfunktion und Geodätische

Lösung (7.1) (a) Ein Kegel mit dem Öffnungswinkel α geht beim Abwickeln in einen Kreissektor mit dem Zentriwinkel $\Phi = 2\pi\sin(\alpha)$ über. Bei diesem Abwickeln gehen zwei Leitlinien, die sich um den Winkel Δu unterscheiden, über in zwei Strahlen, zwischen denen der Winkel $\Delta\Phi = \sin(\alpha)\Delta u$ liegt.



Eine Geodätische, die kein Meridian ist, geht beim Abwickeln des Kegels in mehrere Geradenstücke über, die sich, wenn man die Abwicklung mehrmals nebeneinanderlegt, zu einer beidseitig ausgedehnten Geraden zusammenfügen. Diese nähert sich in jeder ihrer beiden Richtungen jeweils an einen Meridian an (in der folgenden Skizze gestrichelt dargestellt).

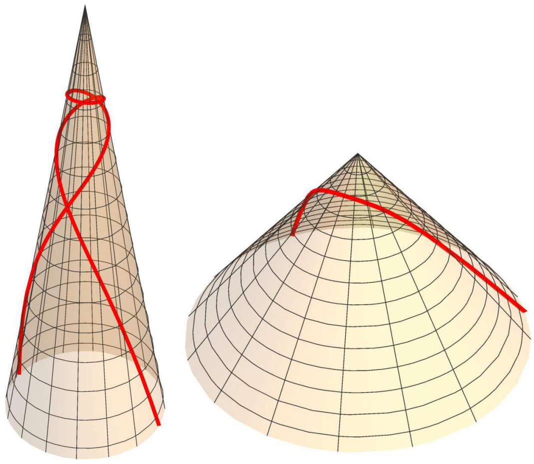


Geodätische eines Kegels nach dessen Abwicklung.

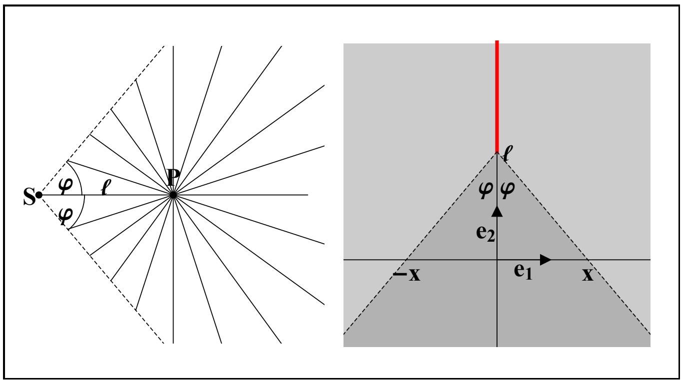
Die Anzahl der Umrundungen des Kegels kann man in der Abwicklung kann man daran ablesen, wie viele Abwicklungen man nebeneinander legen muß, damit die abgewickelte Geodätische als vollständige Gerade erscheint. Schreiben wir $u_{\pm\infty} := \lim_{t\to\pm\infty} u(t)$ für die Polarwinkel der Meridiane, an die sich die Geodätische anschmiegt, so erhalten wir $u_\infty - u_\infty = \Delta u = \pi/\sin(\alpha)$. Die Anzahl voller Umrundungen des Kegels (also die größte Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \cdot 2\pi \le \Delta$) ist daher

$$\left[\frac{u_\infty - u_{-\infty}}{2\pi}\right] = \left[\frac{1}{2\sin\alpha}\right].$$

Die Geodätische schafft also genau dann mindestens eine Umrundung, wenn $1/(2\sin\alpha) \ge 1$ gilt, also $\sin\alpha \le 1/2$ bzw. $\alpha \le 30^0$. (Vgl. Aufgabe (5.5).) Qualitativ sehen also alle Geodätischen auf einem Kegel gleich aus. Es treten um so mehr Umrundungen auf, je spitzer der Kegel ist.



(b) Wie wir in (a) sahen, ist jede Geodätische, die kein Meridian ist, für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert. Die einzige Geodätische durch einen Punkt p des Kegels, die nicht für alle Zeiten definiert ist, ist der von p aus auf die Kegelspitze zulaufende Teil des Meridians durch p. Der Definitionsbereich von $\exp_p$ ist also ganz T_pK mit Ausnahme des in der folgenden Skizze eingereichten roten Strahls (wobei wir $\varphi := \Phi/2$ schreiben).

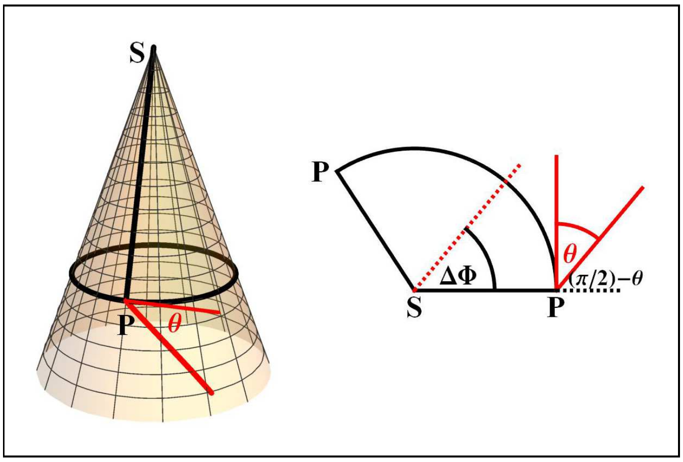


Definitions- und Diffeomorphiebereich der Exponentialfunktion an einem Punkt eines Kegels.

Die Exponentialfunktion ist ein Diffeomorphismus auf dem dunkelgrau markierten Bereich. Dieser ist maximal mit dieser Eigenschaft, denn jede Verlängerung einer der eingezeichneten Geodätischenstücke führt zum Überschreiten einer Begrenzungslinie eines bei der Abwicklung entstehenden Kreissektors und damit zu einer Überschneidung der Geodätischen mit einer anderen Geodätischen, so daß die Injektivität der Exponentialfunktion verlorengeht.

(c) Der Anfangspunkt $\alpha(0) = p$ habe den Abstand ℓ von der Kegelspitze (und damit den Abstand $\ell \sin(\alpha)$ von der Kegelachse) sowie den Polarwinkel u_0 in der Ebene durch p senkrecht zur Kegelachse.

• Wir betrachten zunächst den Fall, daß sich α nach unten bewegt.



In diesem Fall nähert sich α asymptotisch an die Leitlinie zu dem Polarwinkel

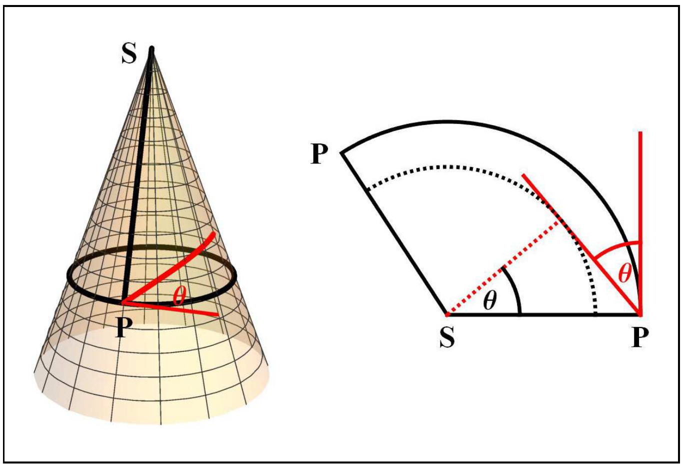
$$u_\infty = u_0 + \frac{(\pi/2) - \theta}{\sin(\alpha)}$$

an. Die Anzahl $n \in \mathbb{N}_0$ der vollen Umrundungen des Kegels, die α vollführt, ist dabei gegeben durch $n\Phi \le \Delta\Phi < (n+1)\Phi$ bzw. $n \le \big((\pi/2) - \theta\big)/\big(2\pi \sin(\alpha)\big) < n + 1$ und damit

$$n = \left[\frac{(\pi/2) - \theta}{2\pi \sin(\alpha)}\right] \quad \text{(Gaußklammerfunktion).}$$

(Je spitzer der Kegel ist und je flacher die Geodätische startet, desto mehr Umrundungen schafft sie.)

• Wir betrachten nun den Fall, daß sich α zunächst nach oben bewegt.



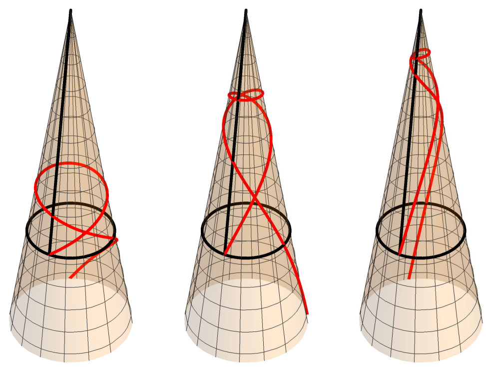
Der Punkt, an dem α der Kegelspitze am nächsten Punkt, hat den Polarwinkel

$$u_{\text{Umkehr}} = u_0 + \frac{\theta}{\sin(\alpha)}\,.$$

In diesem Punkt geht α von einer Aufwärts- in eine Abwärtsbewegung über. Ab dem Erreichen des Umkehrzeitpunktes bewegt sich α nach unten, verhält sich also wie in dem zuvor beschriebenen Fall. Die Anzahl m vollständiger Umrundungen des Kegels bis zum Erreichen des Umkehrpunktes ist dabei gegeben durch die Bedingung $m\Phi \le \theta < (m+1)\Phi$ bzw. $m \le \theta/\big(2\pi \sin(\alpha)\big) < m+1$, also

$$m = \left[\frac{\theta}{2\pi \sin(\alpha)}\right].$$

Je größer der Winkel θ ist (je steiler also die Geodätische vom Punkt p aus startet), desto mehr Umrundungen des Kegels schafft sie.



Lösung (7.2) (a) Wir betrachten die Parametrisierung

$$x(u,v) = \begin{bmatrix} f(v)\cos(u) \\ f(v)\sin(u) \\ g(v) \end{bmatrix}$$

mit $f(v) = v$ und $g(v) = -v/\tan(\alpha)$. Nach Aufgabe (4.6) sind die Gleichungen der Geodätischen gegeben durch $0 = \ddot{u} + 2\dot{u}\dot{v}/v$ bzw. $0 = v^2\ddot{u} + 2v\dot{v}\dot{u} = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(v^2\dot{u})$ und

$$0 = \ddot{v} - v\dot{u}^2 \sin(\alpha)^2.$$

Mit der Clairaut-Konstanten C gilt $\dot{u} = C/v^2$ aufgrund der ersten Gleichung. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich $0 = \ddot{v} - C^2\sin(\alpha)^2/v^3$, nach Durchmultiplizieren mit $2\dot{v}$ also

$$0 = 2\dot{v}\ddot{v} - \frac{2C^2\sin(\alpha)^2\dot{v}}{v^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{v}^2 + \frac{C^2\sin(\alpha)^2}{v^2}\right]$$

und damit

$$(\star) \qquad \dot{v}^2 + \frac{C^2\sin(\alpha)^2}{v^2} = \text{const.}$$

Wir wollen die bisher aufgetretenen Konstanten geometrisch deuten. Die Clairaut-Konstante C ist der konstante Wert $r\cos\theta$, wenn r der Radius eines Breitenkreises ist und θ der Schnittwinkel, den die betrachtete Geodätische mit diesem Breitenkreis bildet. Es seien p der Startpunkt der betrachteten Geodätischen und ℓ der Abstand von p zur Kegelspitze (entlang der Leitlinie durch p). Mit $\theta_0 := \theta(0)$ haben wir dann

$$\begin{aligned} v(0) &= r(0) \;=\; \ell\sin(\alpha),\\ C &= \ell\sin(\alpha)\cos(\theta_0),\\ \dot u(0) &= C/r_0^2 \;=\; \cos(\theta_0)/\bigl(\ell\sin(\alpha)\bigr). \end{aligned}$$

Normieren wir die Geodätische so, daß sie mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird, so haben wir

$$\begin{aligned} 1 &= E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2 \;=\; v^2\dot u^2 + \frac{\dot v^2}{\sin(\alpha)^2}\\ &= C\dot u + \frac{\dot v^2}{\sin(\alpha)^2} \;=\; \cos(\theta_0)^2 + \frac{\dot v(0)^2}{\sin(\alpha)^2}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $t=0$ einsetzten. Es ergibt sich $\dot v(0)^2 = \sin(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2\cos(\theta_0)^2 = \sin(\alpha)^2\sin(\theta_0)^2$ und damit $\dot v(0) = \pm\sin(\alpha)\sin(\theta_0)$. (Das Vorzeichen richtet sich danach, ob sich die Trajektorie anfangs nach oben oder nach unten bewegt.) Einsetzen von $t=0$ in $(\star)$ ergibt

$$(\star\star)\qquad \dot v^2 + \frac{C^2\sin(\alpha)^2}{v^2} \;=\; \sin(\alpha)^2\,.$$

Durchmultiplizieren mit v^2 liefert $v^2\dot v^2 + C^2\sin(\alpha)^2 = \sin(\alpha)^2 v^2$ und damit $v\dot v = \pm\sin(\alpha)\sqrt{v^2-C^2}$ bzw.

$$2v\dot v \;=\; \pm 2\sin(\alpha)\sqrt{v^2-C^2}.$$

Mit $w := v^2$ lautet dies $\dot w = \pm 2\sin(\alpha)\sqrt{w-C^2}$ und damit

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w-C^2}} \;=\; \int \pm\sin(\alpha)\,\mathrm{d}t\,,$$

nach Integration also $\sqrt{w-C^2} = \pm\sin(\alpha)\cdot\bigl(t+\text{const}\bigr)$ und damit

$$v(t)^2 \;=\; w(t) \;=\; C^2 + \sin(\alpha)^2\cdot(t+\text{const})^2.$$

Einsetzen von $t=0$ zeigt, daß die auftretende Integrationskonstante $\pm\ell\sin(\theta_0)$ ist; wir erhalten also die Lösung

$$\begin{aligned} v(t)^2 &= w(t) \;=\; C^2 + \sin(\alpha)^2\cdot\bigl(t\pm\ell\sin(\theta_0)\bigr)^2\\ &= \sin(\alpha)^2\cdot\Bigl(\ell^2\cos(\theta_0)^2 + \bigl(t\pm\ell\sin(\theta_0)\bigr)^2\Bigr). \end{aligned}$$

Das auftretende Vorzeichen ist dasjenige von $\dot v(0)$; es gibt an, ob sich die Trajektorie zunächst nach oben ($\dot v(0)<0$) oder nach unten ($\dot v(0)>0$) bewegt. Im letzteren Fall bewegt sich die Geodätische ständig nach unten. Im ersteren Fall tritt zum Zeitpunkt $t_\star := \ell\sin(\theta_0)$ die Bedingung $\dot v(t_\star)=0$ ein; zu diesem Umkehrzeitpunkt, an dem eine Bewegung nach unten einsetzt, haben wir $v(t_\star) = \ell\sin(\alpha)\cos(\theta_0)$. Wir sehen also auch auf analytischem Wege, daß alle Geodätischen außer den Meridianen für alle Zeiten $t\in\mathbb{R}$ definiert sind. (In der vorigen Aufgabe haben wir dies elementargeometrisch gezeigt.)

(b) Die Geodätische, die von p aus mit einem gegebenen Schnittwinkel θ_0 zum Breitenkreis durch p startet, schneidet den Meridian durch p zu demjenigen Zeitpunkt T wieder, zu dem $u(T) = u(0)+2\pi$ gilt. Dies führt auf die Bedingung

$$\begin{aligned} 2\pi &= u(T)-u(0) \;=\; \int_0^T \dot u(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^T \frac{C}{v(t)^2}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T \frac{\ell\cos(\theta_0)}{\sin(\alpha)\bigl(\ell^2\cos(\theta_0)^2 + (t\pm\ell\sin(\theta_0))^2} \mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\ell\sin(\alpha)\cos(\theta_0)}\int_0^T \frac{\mathrm{d}t}{\left(\dfrac{t-\ell\sin(\theta_0)}{\ell\cos(\theta_0)}\right)^2+1}\\ &= \frac{1}{\sin(\alpha)}\left[\arctan\left(\frac{t-\ell\sin(\theta_0)}{\ell\cos(\theta_0)}\right)\right]_{t=0}^T\\ &= \frac{1}{\sin(\alpha)}\left(\arctan\left(\frac{T-\ell\sin(\theta_0)}{\ell\cos(\theta_0)}\right)+\theta_0\right) \end{aligned}$$

bzw. $T = \ell\sin(\theta_0) + \ell\cos(\theta_0)\tan\bigl(2\pi\sin(\alpha)-\theta_0\bigr)$.

Lösung (7.3) Es gilt die Eulersche Formel

$$\begin{aligned} k_\theta &= \langle v_\theta, C_p v_\theta\rangle\\ &= \langle \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2,\ k_1\cos(\theta)v_1 + k_2\sin(\theta)v_2\rangle\\ &= k_1\cos(\theta)^2 + k_2\sin(\theta)^2. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_\theta \mathrm{d}\theta \;=\; \frac{k_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\theta)^2\mathrm{d}\theta + \frac{k_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\theta)^2\mathrm{d}\theta,$$

und wegen $\int_0^{2\pi}\cos(\theta)^2\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\sin(\theta)^2\mathrm{d}\theta = \pi$ bedeutet dies

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_\theta\mathrm{d}\theta \;=\; \frac{k_1+k_2}{2}\,.$$

Lösung (7.4) Ist $t\mapsto\alpha(t)$ eine (beliebig parametrisierte) Kurve auf einer Fläche F und ist $n(t)$ der Einheitsnormalenvektor von F im Punkt $\alpha(t)$, so sind die Normalkrümmung und die geodätische Krümmung von α gegeben durch die Formeln

$$\kappa_n = \frac{\langle\ddot\alpha, n\rangle}{\Vert\dot\alpha\Vert} \quad\text{und}\quad \kappa_g = \frac{\det(\dot\alpha, \ddot\alpha.n)}{\Vert\dot\alpha\Vert}.$$

(a) Ein Breitenkreis auf einem Zylinder vom Radius R ist gegeben durch $\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t, h)$. Wir haben dann

$$\dot\alpha = R\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{bmatrix},\ \ddot\alpha = -R\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{bmatrix},\ n = \begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{bmatrix}$$

und damit $\kappa_n = -1/R$ und $\kappa_g = 0$. Die Bedingung $\kappa_g = 0$ drückt aus, daß jeder Breitenkreis eines Zylinders eine Geodätische ist.

(b) Der Breitenkreis auf einem Kegel mit dem Öffnungswinkel γ, der in der Höhe h unterhalb der Kegelspitze verläuft, ist gegeben durch die Parametrisierung $\alpha(t) = \big(h\tan(\gamma)\cos(t), h\tan(\gamma)\sin t, -h\big)$. Wir erhalten also

$$\dot\alpha = h\tan(\gamma)\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{bmatrix}, \quad \ddot\alpha = -h\tan(\gamma)\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{bmatrix},$$
$$n = \begin{bmatrix}\cos\gamma\cos t\\ \cos\gamma\sin t\\ \sin\gamma\end{bmatrix}$$

und damit $\kappa_n = -\cos(\gamma)/\big(h\tan(\gamma)\big)$ sowie $\kappa_g = \cos(\gamma)/h$.

(c) Der Breitenkreis auf einer Kugeloberfläche mit Radius R zum Breitengrad θ ist gegeben durch die Parametrisierung $\alpha(t) = R(\cos\theta\cos t, \cos\theta\sin t, \sin\theta)$. Wir erhalten also

$$\dot\alpha = R\cos\theta\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{bmatrix}, \quad \ddot\alpha = -R\cos\theta\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{bmatrix},$$
$$n = \begin{bmatrix}\cos\theta\cos t\\ \cos\theta\sin t\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

und damit $\kappa_n = -1/R$ und $\kappa_g = -\tan(\theta)/R$. Nur für $\theta = 0$ verschwindet die geodätische Krümmung; dies drückt aus, daß der Äquator der einzige Breitenkreis ist, der eine Geodätische darstellt.

Lösung (7.5) (a) Nach Definition von φ gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} T &= \cos\varphi\, v_1 + \sin\varphi\, v_2,\\ e &= -\sin\varphi\, v_1 + \cos\varphi\, v_2. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich (wenn wir $p := \alpha(0)$ setzen) die Gleichung

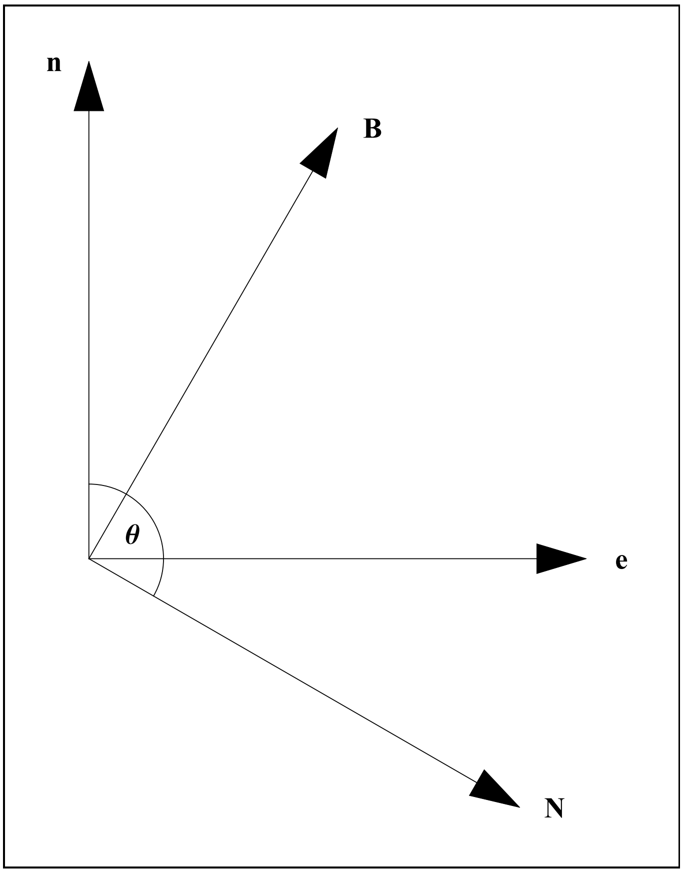
$$\begin{aligned} \tau_g &= \langle (\mathrm{d}/\mathrm{d}s)\,|_{s=0}\, n\big(\alpha(s)\big), e\rangle \;=\; \langle n'(p)\alpha'(0), e\rangle\\ &= \langle n'(p)T, e\rangle \;=\; -\langle C_pT, e\rangle\\ &= -\langle k_1\cos\varphi\, v_1 + k_2\sin\varphi\, v_2,\, -\sin\varphi\, v_1 + \cos\varphi\, v_2\rangle\\ &= \langle k_1\cos\varphi\, v_1 + k_2\sin\varphi\, v_2,\, \sin\varphi\, v_1 - \cos\varphi\, v_2\rangle\\ &= k_1\sin\varphi\,\cos\varphi - k_2\sin\varphi\,\cos\varphi\\ &= (k_1-k_2)\sin\varphi\,\cos\varphi. \end{aligned}$$

Beim Übergang von der vorletzten zur letzten Zeile nutzten wir aus, daß v_1 und v_2 ein Orthonormalsystem bilden.

(b) Ableiten der Gleichung $\cos\theta = \langle N, n\rangle$ liefert

$$\begin{aligned} -\theta'(s)\sin\theta &= \langle N', n\rangle + \langle N, (\mathrm{d}/\mathrm{d}s)n\big(\alpha(s)\big)\rangle\\ &= \langle -\kappa T - \tau B, n\rangle + \langle N, -\kappa_n T + \tau_g e\rangle\\ &= -\kappa\langle T, n\rangle - \tau\langle B, n\rangle - \kappa_n\langle N, T\rangle + \tau_g\langle N, e\rangle\\ &= -\tau\langle B, n\rangle + \tau_g\langle N, e\rangle, \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Schritt ausnutzten, daß n und N beide senkrecht auf T stehen. Wir behaupten nun, daß $\langle n, B\rangle = \langle n, e\rangle = \sin\theta$ gilt. Das folgt daraus, daß die Beziehungen $\angle B, n\rangle = \angle N, e\rangle = \theta - (\pi/2)$ und daher die Gleichungen $\langle B, n\rangle = \langle N, e\rangle = \cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$ gelten.



Setzen wir dies in $(\star)$ ein, so ergibt sich $-\theta'(s)\sin\theta = -\tau\sin\theta + \tau_g\sin\theta$, folglich $-\theta' = -\tau + \tau_g$ bzw. $\theta' = \tau - \tau_g$.

(c) Ist ganz allgemein (e_1, e_2, e_3) ein bewegliches Dreibein, so folgt aus $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ die Gleichung $0 = \langle e_i, e_j\rangle' = \langle e_i', e_j\rangle + \langle e_i, e_j'\rangle$; die Matrix mit den Einträngen $\langle e_i', e_j\rangle$ ist also schiefsymmetrisch. Es gibt daher Skalare a, b, c mit

$$T' = ae + bn, \quad e' = -aT + cn, \quad n' = -bT - ce.$$

Bilden wir in der ersten Gleichung das Skalarprodukt mit e bzw. mit n, so erhalten wir $a = \langle T', e\rangle = \langle\kappa N, e\rangle = \kappa_g$ sowie $b = \langle T', n\rangle\langle\kappa N, n\rangle = \kappa_n$. Bilden wir ferner in der letzten Gleichung das Skalarprodukt mit e, so erhalten wir $c = -\langle n', e\rangle = -\tau_g$.