6. Lösung zur Differentialgeometrie: Geodätische Kurven

Lösung (6.1) Es sei α eine Geodätische. Für jede Zeit t bezeichnen wir mit $r(t)$ den Radius des Breitenkreises, auf dem $\alpha(t)$ liegt, und mit $\theta(t)$ den Winkel, unter dem α zur Zeit t diesen Breitenkreis schneidet. Wir unterscheiden drei Fälle.

(1) Bewegt sich α anfangs nach oben, so wird r größer, nach der Clairautschen Relation damit auch θ, so daß die Kurve steiler wird. Die Geodätische verläuft also immer weiter nach oben.

(2) Bewegt sich α anfangs tangential ($\theta(t_0) = 0$), so wird θ größer, nach der Clairautschen Relation damit auch r, und wir sind in der gleichen Situation wie in (1).

(3) Bewegt sich α anfangs nach unten, so wird r kleiner, nach der Clairautschen Relation damit auch θ, so daß die Kurve flacher wird. Der Steigungswinkel θ wird also kleiner und kleiner. Da das Paraboloid nach unten begrenzt ist, muß θ entweder asymptotisch gegen Null gehen oder aber den Wert 0 annehmen. Der erste Fall ist aber nicht möglich, weil sich sonst α an einen Breitenkreis anschmiegen müßte, der aber nicht selbst eine Geodätische sein kann. Also muß α irgendwann einen tiefsten Punkt erreichen, an dem $\theta = 0$ gilt, und sich ab dann wie in (1) verhalten.

Es bleibt zu zeigen, daß α jeden Meridian unendlich oft schneidet (und damit auch sich selbst, wenn man $\alpha(t)$ für $-t < t < \infty$ betrachtet). Das Rotationsparaboloid entsteht durch Rotation der Kurve $(x,z) = \big(f(v), g(v)\big)$ mit $f(v) = v$ und $g(v) = v^2$ um die z-Achse, hat also die Parametrisierung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(v)\cos u \\ f(v)\sin u \\ g(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v\cos u \\ v\sin u \\ v^2 \end{bmatrix}.$$

Nach Aufgabe (4.6)(d) gilt für eine Geodätische $t \mapsto \big(U(t), V(t)\big)$, die weder ein Meridian noch ein Breitenkreis ist, mit der Clairaut-Konstanten c die Beziehung

$$\begin{aligned} U &= u_0 + c\int_{v_0}^{V} \frac{1}{f(v)}\sqrt{\frac{f'(v)^2 + g'(v)^2}{f(v)^2 - c^2}}\,\mathrm{d}v \\ &= u_0 + c\int_{v_0}^{V} \frac{1}{v}\sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2 - c^2}}\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

und wegen $(1+4v^2)/(v^2-c^2) \geq 1$ damit

$$|U - u_0| \;\geq\; c\int_{v_0}^{V} \frac{\mathrm{d}v}{v} \;\to\; \infty \quad \text{für } V \to \infty.$$

Also gilt $U(t) \to \infty$ für $t \to \infty$, und hieraus folgt die Behauptung.

Lösung (6.2) Es sei α_θ die Geodätische, die in $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ startet und deren Anfangsrichtung den Winkel θ mit dem Breitenkreis durch p_0 bildet. Verläuft α_θ anfangs horizontal oder nach oben, so bleibt dies nach der Clairautschen Relation auch für alle zukünftigen Zeiten der Fall. Wir nehmen nun an, daß sich α_θ anfangs nach unten bewegt. Für θ nahe bei Null verläuft α_θ nahe bei α_0 und damit nach einer kurzen Anfangsphase nach oben. Für θ nahe bei $\pi/2$ verläuft α_θ nahe bei dem Meridian $\alpha_{\pi/2}$ und dringt daher nach einiger Zeit in die untere Hälfte des Hyperboloids ein. Interessant ist die Frage, was für die Winkel dazwischen geschieht. Wir bezeichnen mit I_1 die Menge aller Winkel $\theta \in (0, \pi/2)$, für die α_θ im Bereich $z > 0$ einen tiefsten Punkt annimmt, und mit I_2 die Menge aller Winkel $\theta \in (0,\pi/2)$, für die α_θ in den Bereich $z > 0$ eindringt. Man überlegt sich schnell, daß I_1 und I_2 aus Stetigkeitsgründen disjunkte offene Intervalle sein müssen und daß mit $\theta_\star := \sup I_1 = \inf I_2$ die Gleichung $(0, \pi/2) = I_1 \cup \{\theta_\star\} \cup I_2$ gilt. Die zu dem Grenzwinkel $\theta_\star$ gehörige Geodätische $\alpha_{\theta_\star}$ nimmt also im Bereich $z > 0$ keinen tiefsten Punkt an, verbleibt aber in der Menge $z \geq 0$. Würde also $\alpha_{\theta_\star}$ den Breitenkreis B treffen (sagen wir in einem Punkt p), dann nur tangential. Das ist aber nicht möglich, weil sonst $\alpha_{\theta_\star}$ und B nach Parametrisierung auf Bogenlänge zwei verschiedene Geodätische mit gleichem Anfangspunkt p und gleicher Anfangsrichtung wären, was dem Eindeutigkeitssatz für Geodätische widerspräche. Dies läßt nur die Möglichkeit offen, daß $\alpha_{\theta_\star}$ sich asymptotisch an den Breitenkreis B annähert, ohne ihn jemals zu erreichen.

Wir wollen nun zeigen, daß die Geodätischen der Fälle (a) und (b), also diejenigen, die letztlich nach oben verlaufen, sich asymptotisch an einen Meridian anschmiegen. Das Rotationshyperboloid entsteht durch Rotation der Kurve $(x,z) = \big(f(v), g(v)\big)$ mit $f(v) = \sqrt{1+v^2}$ und $g(v) = v^2$ um die z-Achse, hat also die Parametrisierung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(v)\cos u \\ f(v)\sin u \\ g(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+v^2}\cos u \\ \sqrt{1+v^2}\sin u \\ v \end{bmatrix}.$$

Nach Aufgabe (4.6)(d) gilt für eine Geodätische $t \mapsto \big(U(t), V(t)\big)$, die weder ein Meridian noch ein Breitenkreis ist, mit der Clairaut-Konstanten c die Beziehung

$$\begin{aligned} U &= u_0 + c\int_{v_0}^{V} \frac{1}{f(v)}\sqrt{\frac{f'(v)^2 + g'(v)^2}{f(v)^2 - c^2}}\,\mathrm{d}v \\ &= u_0 + c\int_{v_0}^{V} \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{\frac{(1+2v^2)/(1+v^2)}{1+v^2-c^2}}\,\mathrm{d}v \\ &= u_0 + c\int_{v_0}^{V} \frac{1}{1+v^2}\sqrt{\frac{2v^2+1}{v^2+1-c^2}}\,\mathrm{d}v\,. \end{aligned}$$

Für $V \to \infty$ gilt also

$$U \;\to\; u_0 + c\int_{v_0}^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\sqrt{\frac{2v^2+1}{v^2+1-c^2}}\,\mathrm{d}v \;=:\; U_\infty.$$

(Wegen der Konvergenz des uneigentlichen Integrals ist U_∞ ein endlicher Wert.) Die betrachtete Geodätische schmiegt sich also asymptotisch an den Meridian $u = U_\infty$ an (und kann damit das Rotationshyperboloid nur endlich oft umrunden, nämlich n mal, wenn $n \cdot 2\pi \le U_\infty - u_0 < (n+1) \cdot 2\pi$ gilt).

Lösung (6.3) Es sei r_0 der gemeinsame Radius der beiden betrachteten Breitenkreise B_1 und B_2. Aufgrund der Voraussetzung über die Wölbung der Fläche gilt dann $r > r_0$ für alle Breitenkreise zwischen B_1 und B_2. Wir betrachten eine Geodätische α, die tangential (also mit dem "Schnittwinkel" $\theta = 0$) von B_1 aus startet. Der Winkel kann dann entlang α nur zunehmen. Nach der Clairautschen Relation nimmt dann auch r zu; die Geodätische α verläuft also in Richtung zunehmender Radien. Ist der Breitenkreis mit maximalem Radius R erreicht (der selbst eine Geodätische ist), so wird dieser mit maximalem Schnittwinkel $\theta > 0$ überquert, bevor dann r und folglich auch θ wieder abnehmen. Da sich α nicht asymptotisch an einen Breitenkreis annähern kann, wird nach einer gewissen Zeit der Winkel $\theta = 0$ wieder erreicht, und zwar aufgrund der Clairautschen Relation genau dann, wenn $r = r_0$ gilt, also beim Erreichen von B_2. Ab diesem Moment wiederholt sich der Vorgang. Die Geodätische oszilliert also zwischen den beiden Breitenkreisen B_1 und B_2.

Lösung (6.4) Die einzigen Breitenkreise des Torus, die Geodätische sind, sind die Breitenkreise $v = 0$ (ganz außen) und $v = \pi$ (ganz innen). Wir betrachten eine Geodätische, die vom Breitenkreis $v = 0$ aus startet, und fragen, ob diese wieder zum Breitenkreis $v = 0$ zurückkehrt, ohne den Breitenkreis $v = \pi$ zu erreichen. Es sei θ der Schnittwinkel zwischen dem Breitenkreis $v = 0$ und der Anfangsrichtung von α. Am Rückkehrpunkt muß $\theta = 0$ gelten; der Radius ρ des Breitenkreises durch den Umkehrpunkt ist dann gegeben durch $\rho = \rho\cos(0) = (R+r)\cos(\theta)$, was wegen $\rho \ge R - r$ nur für $R - r \ge (R+r)\cos(\theta)$ möglich ist. Gilt also

$$\cos\theta \;<\; \frac{R-r}{R+r}$$

(schneidet also α den Breitenkreis $v = 0$ unter einem hinreichend großen Winkel), so nimmt θ zu keinem Zeitpunkt den Wert Null an. Die Geodätische α schneidet in diesem Fall also jeden Breitenkreis unter einem positiven Winkel, windet sich folglich unendlich oft um den Torus herum.

Lösung (6.5) Minimiert α das Energiefunktional $\int_{t_1}^{t_2} \|\dot\alpha(t)\|^2 \mathrm{d}t$, so minimiert für jedes Zeitintervall $[\tau_1, \tau_2] \subseteq [t_1, t_2]$ die Einschränkung $\alpha\,|_{[\tau_1,\tau_2]}$ das Funktional $\beta \mapsto \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\dot\beta(t)\|^2 \mathrm{d}t$. Wir dürfen also o.B.d.A. annehmen, daß die Kurve α ganz in einem Kartenbereich verläuft, also durch eine einzelne Parametrisierung erfaßt wird. In Koordinaten haben wir dann eine Darstellung $\alpha(t) = x\big(u(t), v(t)\big)$ und daher $\|\dot\alpha\|^2 = E(u,v)\dot u^2 + 2F(u,v)\dot u\dot v + G(u,v)\dot v^2$. Die Funktionen $t \mapsto u(t)$ und $t \mapsto v(t)$ minimieren also das Funktional $\int_{t_0}^{t_1} L\big(u(t), v(t), \dot u(t), \dot v(t)\big)\,\mathrm{d}t$ mit

$$L(u, v, \dot u, \dot v) \;:=\; E(u,v)\dot u^2 + 2F(u,v)\dot u\dot v + G(u,v)\dot v^2.$$

Sie müssen daher die Euler-Lagrange-Gleichungen $L_u - (L_{\dot u})^\bullet = 0$ und $L_v - (L_{\dot v})^\bullet = 0$ erfüllen. Die erste dieser Gleichungen lautet

$$\begin{aligned}
0 &= E_u\dot u^2 + 2F_u\dot u\dot v + G_u\dot v^2 - [2E\dot u + 2F\dot v]^\bullet \\
&= E_u\dot u^2 + 2F_u\dot u\dot v + G_u\dot v^2 - 2(E_u\dot u + E_v\dot v)\dot u \\
&\qquad - 2E\ddot u - 2(F_u\dot u + F_v\dot v)\dot v - 2F\ddot v \\
&= -E_u\dot u^2 - 2E_v\dot u\dot v + (G_u - 2F_v)\dot v^2 - 2E\ddot u - 2F\ddot v,
\end{aligned} \tag{1}$$

die zweite dagegen

$$\begin{aligned}
0 &= E_v\dot u^2 + 2F_v\dot u\dot v + G_v\dot v^2 - [2F\dot u + 2G\dot v]^\bullet \\
&= E_v\dot u^2 + 2F_v\dot u\dot v + G_v\dot v^2 - 2(F_u\dot u + F_v\dot v)\dot u \\
&\qquad - 2F\ddot u - 2(G_u\dot u + G_v\dot v)\dot v - 2G\ddot v \\
&= (E_v - 2F_u)\dot u^2 - 2G_u\dot u\dot v - G_v\dot v^2 - 2F\ddot u - 2G\ddot v.
\end{aligned} \tag{2}$$

Fassen wir (1) und (2) zusammen, so erhalten wir nach Division durch 2 die Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= E\ddot u + F\ddot v + (E_u/2)\dot u^2 + E_v\dot u\dot v + (F_v - G_u/2)\dot v^2, \\
0 &= F\ddot u + G\ddot v + (F_u - E_v/2)\dot u^2 + G_u\dot u\dot v + (G_v/2)\dot v^2.
\end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen für das Energiefunktional $\int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t$ sind also genau die Gleichungen für die Geodätischen. Damit ist gezeigt, daß die energieminimalen Kurven Geodätische sind. Da die Lagrange-Funktion L nicht explizit von t abhängt, existiert das Beltrami-Integral

$$L - \dot u \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot u} - \dot v \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot v} \;=\; \text{const.}$$

als erstes Integral, und wir wollen sehen, welche Bedeutung dieses erste Integral hat. Wir erhalten für $L - \dot u L_{\dot u} - \dot v \cdot L_{\dot v}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}
& E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2 - \dot u(2E\dot u + 2F\dot v) - \dot v(2F\dot u + 2G\dot v) \\
&= -(E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2).
\end{aligned}$$

Es gibt also eine Konstante c mit

$$E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2 \;=\; c.$$

Diese Gleichung liefert keine neue Information, sondern drückt nur aus, daß eine geodätische Kurve zwangsläufigt mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird.