5. Lösung zur Differentialgeometrie: Geodätische Kurven

Lösung (5.1) O.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß der Mittelpunkt der betrachteten Sphäre der Nullpunkt ist. Ist dann x der Ortsvektor eines Punktes auf der Sphäre, so ist der Normalenvektor an der Stelle x gleich $N = x/\|x\|$. Wir erhalten daher die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ ist geodätisch } &\Leftrightarrow \ddot{\alpha} \in \mathbb{R}\, N \\
&\Leftrightarrow \ddot{\alpha} \in \mathbb{R}\, \alpha \\
&\Leftrightarrow \alpha \times \ddot{\alpha} \;=\; 0 \\
&\Leftrightarrow (\alpha \times \dot{\alpha})^\bullet \;=\; 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha \times \dot{\alpha} \text{ ist konstant.}
\end{aligned}$$

Wir behaupten nun, daß diese letzte Bedingung genau dann erfüllt ist, wenn α mit konstanter Geschwindigkeit in einer Ebene durch den Mittelpunkt der Sphäre verläuft. Dies sehen wir folgendermaßen ein.

• Es sei $\alpha \times \dot{\alpha}$ konstant, sagen wir $\alpha(t) \times \dot{\alpha}(t) = n$ mit einem konstanten Vektor n. Ist $n = 0$, so ist $\dot{\alpha} \equiv 0$, und wir erhalten den Trivialfall einer konstanten Kurve. Ist $n \neq 0$. so verläuft α ganz in der Ursprungsebene $n^\perp$, und wegen $\dot{\alpha} \perp \alpha$ gilt $\|n\| = \|\dot{\alpha} \times \alpha\| = \|\dot{\alpha}\| \cdot \|\alpha\| = \|\dot{\alpha}\| \cdot R$, wenn R den Radius der Sphäre bezeichnet, so daß $\|\dot{\alpha}\|$ konstant ist.

• Verläuft umgekehrt α ganz innerhalb einer Ebene mit dem (auf Länge 1 normierten) Normalenvektor n und wählen wir e_1 und e_2 so, daß (e_1, e_2, n) eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist, so haben wir eine Darstellung $\alpha(t) = R\cos\big(\varphi(t)\big)e_1 + R\sin\big(\varphi(t)\big)e_2$ und damit $\alpha(t) \times \dot{\alpha}(t) \times \alpha(t) = \dot{\varphi}(t)\, n$, wobei $\dot{\varphi}(t) = \pm\|\dot{\alpha}(t)\|$ konstant ist.

Um den von einem Punkt p zu einem Punkt q führenden Großkreisbogen zu finden, führen wir zunächst eine Gram-Schmidt-Orthonomalisierung für das Paar (p, q) durch. Wir erhalten zunächst $e_1 = p/\|p\| = p/R$ und dann

$$e_2 \;=\; \frac{q - \langle q, e_1\rangle e_1}{\|q - \langle q, e_1\rangle e_1\|} \;=\; \frac{R^2 q - \langle q, p\rangle p}{R^3 \sin\Phi},$$

wenn Φ den Winkel zwischen p und q bezeichnet. Die gesuchte Geodätische ist dann gegeben durch

$$\alpha(t) \;=\; R\cos(t)e_1 \;+\; R\sin(t)e_2 \quad (0 \le t \le \Phi).$$

Lösung (5.2) Die Parametrisierung der Sphäre durch geographische Länge und Breite ist gegeben durch

$$x = \begin{bmatrix} \cos\varphi\,\cos\theta \\ \sin\varphi\,\cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix},$$

wobei wir φ als ersten und θ als zweiten Parameter wählen. Wir erhalten dann für $x_1 = x_\varphi$ und $x_2 = x_\theta$ die Gleichungen

$$x_1 = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\,\cos\theta \\ \cos\varphi\,\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\,\sin\theta \\ -\sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

sowie für $x_{11} = x_{\varphi\varphi}$, $x_{12} = x_{\varphi\theta} = x_{\theta\varphi} = x_{21}$ und $x_{22} = x_{\theta\theta}$ die Gleichungen

$$x_{11} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\,\cos\theta \\ -\sin\varphi\,\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{12} = \begin{bmatrix} \sin\varphi\,\sin\theta \\ -\cos\varphi\,\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{und} \quad x_{22} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\,\cos\theta \\ -\sin\varphi\,\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \;=\; -x.$$

Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform sind dann

$$\begin{aligned}
E &= \langle x_1, x_1\rangle \;=\; \cos^2\theta, \\
F &= \langle x_1, x_2\rangle \;=\; 0, \\
G &= \langle x_2, x_2\rangle \;=\; 1.
\end{aligned}$$

Die Christoffelsymbole ergeben sich allgemein aus der Gleichung

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_{11}, x_1\rangle & \langle x_{12}, x_1\rangle & \langle x_{22}, x_1\rangle \\ \langle x_{11}, x_2\rangle & \langle x_{12}, x_2\rangle & \langle x_{22}, x_2\rangle \end{bmatrix}.$$

In unserem Fall erhalten wir

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\theta\cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und damit

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\theta & 0 \\ \sin\theta\,\cos\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Gleichungen der Geodätischen lauten allgemein

$$\begin{aligned}
0 &= \ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2, \\
0 &= \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2,
\end{aligned}$$

in unserem Fall also

$$(\star) \quad \ddot{\varphi} - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\tan(\theta) = 0, \qquad \ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \sin(\theta)\cos(\theta) = 0.$$

Nehmen wir $\dot{\varphi} \neq 0$ an, so geht die erste Gleichung über in $\ddot{\varphi}/\dot{\varphi} = 2\dot{\theta}\tan(\theta)$ und damit $\ln|\dot{\varphi}| = -2\ln|\cos(\theta)| + A = \ln\big(\cos(\theta)^{-2}\big) + A$ mit einer Konstanten C. Setzen wir $C := \pm\exp(A)$, so bedeutet dies

$$\dot{\varphi} \;=\; \frac{C}{\cos(\theta)^2}.$$

Setzen wir dies in die zweite Gleichung in $(\star)$ ein, so ergibt sich $\ddot{\theta} + C^2 \sin(\theta)/\cos(\theta)^3 = 0$, nach Durchmultiplizieren mit $2\dot{\theta}$ also

$$0 \;=\; 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{2C^2\sin\theta}{\cos^3\theta}\cdot\dot{\theta} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}^2 + \frac{C^2}{\cos^2\theta}\right].$$

Integration ergibt $\dot{\theta}^2 + C^2/\cos(\theta)^2 = A^2$ mit einer Konstanten A und damit

$$\dot{\theta} \;=\; \pm\frac{\sqrt{A^2\cos^2\theta - C^2}}{\cos\theta}.$$

Um θ als Funktion von φ auszudrücken, müssen wir die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi} \;=\; \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} \;=\; \pm\frac{\cos\theta\sqrt{A^2\cos^2\theta - C^2}}{C}$$

lösen, mit $D := \pm C/A$ also

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi} \;=\; \frac{\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta - D^2}}{D}.$$

Nach Trennung der Variablen und Durchführung der Substitution

$$w = \frac{D\tan\theta}{\sqrt{1-D^2}}, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} = \frac{D}{\cos^2\theta\sqrt{1-D^2}},$$
$$\sqrt{1-w^2} = \frac{\sqrt{\cos^2\theta - D^2}}{\sqrt{1-D^2}\cos\theta}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi \;&=\; \int \mathrm{d}\varphi \;=\; \int \frac{D}{\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta - D^2}}\mathrm{d}\theta \\ &=\; \int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-w^2}} \;=\; \arcsin(w) + E \\ &=\; \arcsin\left(\frac{D\tan\theta}{\sqrt{1-D^2}}\right) + E.\end{aligned}$$

Nach Umbenennung der Konstanten erhalten wir also einen Zusammenhang der Form

$$\theta \;=\; \arctan\bigl(a\sin(\varphi - b)\bigr).$$

Ist eine geodätische Kurve von einem Anfangspunkt der geographischen Länge φ_1 und der geographischen Breite θ_1 zu einem Endpunkt der geographischen Länge φ_2 und der geographischen Breite θ_2 gesucht, so sind die Konstanten a und b so zu wählen, daß die Bedingungen $\theta(\varphi_0) = \theta_0$ und $\theta(\varphi_1) = \theta_1$ gelten. Dies führt auf die Gleichungen

$$b \;=\; \frac{\tan(\theta_2)\sin(\varphi_1) - \tan(\theta_1)\sin(\varphi_2)}{\tan(\theta_2)\cos(\varphi_1) - \tan(\theta_1)\cos(\varphi_2)}$$

und

$$a \;=\; \frac{\tan(\theta_1)}{\sin(\varphi_1 - b)} \;=\; \frac{\tan(\theta_2)}{\sin(\varphi_2 - b)}.$$

Lösung (5.3) Wir verwenden die Parametrisierung der Sphäre durch Kugelkoordinaten wie in der vorigen Aufgabe. Für eine Kurve $\alpha(t) = x\bigl(\varphi(t),\theta(t)\bigr)$ erhalten wir daher $\dot{\alpha} = x_\theta\dot{\theta} + x_\varphi\dot{\varphi}$ und folglich

$$(\star) \qquad \|\dot{\alpha}\|^2 \;=\; \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta.$$

Eine solche Kurve bildet genau dann einen konstanten Winkel β mit der Nordrichtung, wenn

$$\cos(\beta) \;=\; \frac{\langle x_\theta, \dot{\alpha}\rangle}{\|x_\theta\|\,\|\dot{\alpha}\|} \;=\; \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta}}$$

gilt. Quadrieren und Umstellen führt auf die Gleichung $\dot{\theta}^2\cos^2\beta + \dot{\varphi}^2\cos^2\beta\cos^2\theta = \dot{\theta}^2$ bzw. $\dot{\varphi}^2\cos^2\beta\cos^2\theta = \dot{\theta}^2\sin^2\beta$. Dies liefert $\dot{\varphi}^2\cos^2\theta = \dot{\theta}^2\tan^2\beta$ bzw.

$$(\star\star) \qquad \dot{\varphi}\cos\theta \;=\; \pm\dot{\theta}\tan\beta,$$

wobei das Vorzeichen den Durchlaufsinn der Kurve bestimmt. Wir nehmen an, daß die Kurve bei wachsender geographischer Länge in Richtung wachsender geographischer Breite verläuft, wählen also das positive Vorzeichen. Trennung der Variablen ergibt dann

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta)} \;=\; \frac{1}{\tan(\beta)}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{d}\varphi,$$

also

$$\ln\tan\left(\frac{\theta + (\pi/2)}{2}\right)\Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} \;=\; \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\tan(\beta)}.$$

Diese Gleichung legt fest, wie der Kurswinkel β zu wählen ist. Halten wir in ihr die Anfangsposition (θ_1, φ_1) fest und die Endposition $(\theta_2, \varphi_2) = (\theta, \varphi)$ variabel, so ergibt sich

$$\tan\left(\frac{\theta + (\pi/2)}{2}\right) \;=\; \tan\left(\frac{\theta_1 + (\pi/2)}{2}\right)\exp\left(\frac{\varphi - \varphi_1}{\tan(\beta)}\right)$$

als Gleichung der Loxodrome.

(b) Wegen $(\star)$ und $(\star\star)$ gilt für die Bogenlänge einer Loxodrome die Gleichung

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\|\dot{\alpha}(t)\|\,\mathrm{d}t \;&=\; \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{\theta}(t)^2 + \dot{\varphi}(t)^2\cos\bigl(\theta(t)\bigr)^2}\,\mathrm{d}t \\ &=\; \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{\theta}(t)^2(1+\tan^2\beta)}\,\mathrm{d}t \\ &=\; \int_{t_1}^{t_2}\frac{\dot{\theta}(t)}{\cos\beta}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\theta_2 - \theta_1}{\cos\beta}.\end{aligned}$$

Im Grenzfall $\theta_1 \to -\pi/2$ (Südpol) und $\theta_2 \to \pi/2$ (Nordpol) ergibt sich $\pi/\cos(\beta)$ als Länge der Loxodrome. (Diese Loxodrome windet sich also unendlich oft um jeden der beiden Pole herum, hat aber dennoch eine endliche Länge.)

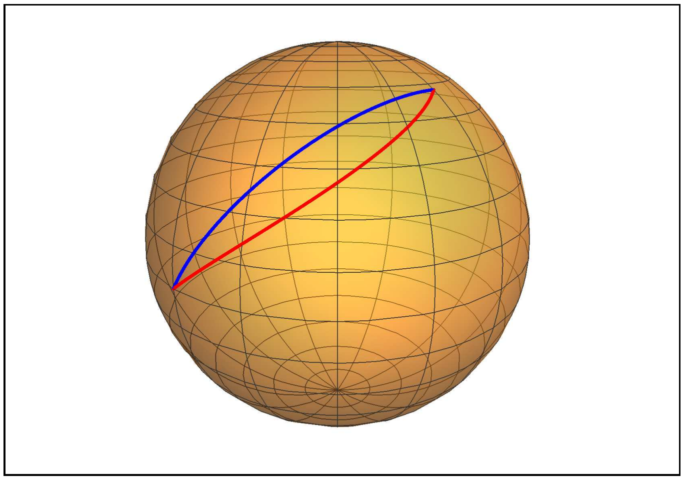

Abb. 5.3a: Orthodrome (blau) und Loxodrome (rot) auf einer Sphäre.

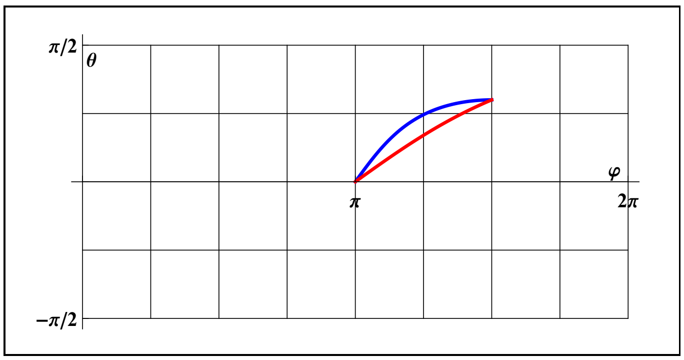

Abb. 5.3b: Zugehörige Kurven im Parameterbereich.

Lösung (5.4) Der Zylinder ist ein Rotationskörper wie in Aufgabe (4.2) mit $f(v) \equiv R$ und $g(v) = v$. Die Gleichungen für die Geodätischen sind einfach $\ddot{u} = \ddot{v} = 0$ mit den Lösungen $u(t) = At+B$ und $v(t) = Ct+D$ (wobei wir annehmen dürfen, daß die Koeffizienten A und C nicht beide Null sind, weil wir sonst nur eine konstante Kurve erhielten). Die Geodätischen auf dem Zylinder sind also von der Form

$$(\star) \qquad \alpha(t) \;=\; \begin{bmatrix} R\cos(At+B) \\ R\sin(At+B) \\ Ct+D \end{bmatrix}.$$

Ist $A = 0$ (mit $C \neq 0$), so beschreibt $(\star)$ einen Meridian, also eine Mantellinie des Zylinders. Ist $C = 0$ (mit $A \neq 0$), so beschreibt $(\star)$ einen Breitenkreis. Ist $AC \neq 0$, so beschreibt $(\star)$ eine Schraubenlinie (Helix) mit der Ganghöhe $2\pi|C/A|$. Liegen zwei Punkte $P \neq Q$ des Zylinders auf gleicher Höhe, also auf dem gleichen Breitenkreis des Zylinders, so ist dieser die einzige geodätische Kurve, die P und Q verbindet. In allen anderen Fällen gibt es abzählbar unendlich viele Geodätische, die P und Q verbinden. Dies macht man sich sofort klar, wenn man sich den Zylinder entlang eines Meridians aufgeschnitten denkt bzw. sich vorstellt, der Zylinder entstehe durch Zusammenrollen einer Ebene, wobei jeweils vertikale Linien im Abstand $2\pi R$ mit der gleichen Leitlinie des Zylinders identifiziert werden. Bei festgehaltenem Punkt P entsprechen dem Punkt Q dann unendlich viele Urbilder Q_k in der Ebene, und jede Geodätische auf dem Zylinder entsteht beim Zusammenrollen aus einer der Geodätischen (also Geraden!) $\overline{PQ_k}$ in der Ebene.

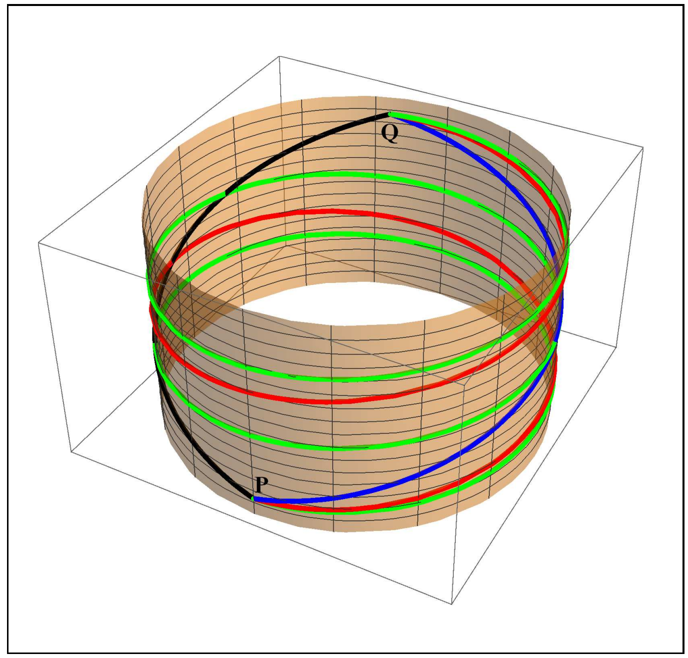

Abb. 5.4a: Verschiedene geodätische Verbindungskurven zwischen zwei Punkten auf einem Zylinder.

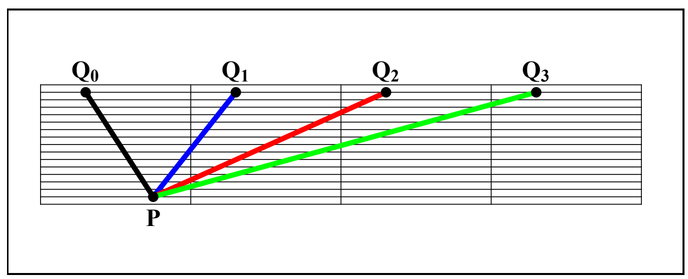

Abb. 5.4b: Urbilder dieser geodätischen Kurven in der Ebene vor dem Zusammenrollen.

Lösung (5.5) (a) Nach dem Straffziehen wirken auf das um den Kegel liegende Seilstück keine tangentialen Kräfte mehr, sondern nur noch Normalkräfte; das Seil liegt daher entlang einer Geodätischen um den Kegel. Wir müssen also die Geodätischen auf einem senkrechten Kreiskegel bestimmen. Ein solcher Kegel ist ein Rotationskörper wie in Aufgabe (4.2) mit $f(v) = v\sin\alpha$ und $g(v) = -v\cos\alpha$, wenn α den Öffnungswinkel bezeichnet und wenn wir den Nullpunkt des gewählten Koordinatensystems in die Kegelspitze legen. Als Gleichung für die Geodätischen erhalten wir

$$\ddot{u} + \frac{2}{v}\dot{u}\dot{v} = 0, \quad \ddot{v} - v\sin^2\alpha \cdot \dot{u}^2 = 0.$$

Integration der ersten Gleichung führt auf die Clairautsche Relation $\dot{u} = C/v^2$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt dann $\ddot{v} - C^2\sin(\alpha)^2/v^3 = 0$, nach Durchmultiplizieren mit $2\dot{v}$ also

$$0 \;=\; 2\dot{v}\ddot{v} - \frac{2C^2\sin(\alpha)^2}{v^3}\dot{v} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{v}^2 + \frac{C^2\sin(\alpha)^2}{v^2}\right]$$

und damit $\dot{v}^2+C^2\sin(\alpha)^2/v^2 = A^2$ bzw. $v^2\dot{v}^2+C^2\sin(\alpha)^2 = A^2v^2$ mit einer Konstanten A. Mit $w := v^2$ geht diese Gleichung über in $\dot{w}^2/4+C^2\sin(\alpha)^2 = A^2w$, nach Durchmultiplizieren mit 4 also $\dot{w}^2 = 4A^2w - 4C^2\sin(\alpha)^2$ bzw. $\dot{w} = \pm 2\sqrt{A^2w - C^2\sin(\alpha)^2}$. Integration ergibt

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{A^2w - C^2\sin(\alpha)^2}} \;=\; \pm\int \mathrm{d}t,$$

damit $\sqrt{A^2w - C^2\sin(\alpha)^2} = \pm(A^2t+E)$ und mit $D := A^2$ folglich

$$(1) \qquad v(t)^2 \;=\; w(t) \;=\; \frac{(Dt+E)^2 + C^2\sin(\alpha)^2}{D}.$$

Einsetzen in die Clairautsche Relation $\dot{u} = C/v^2$ ergibt

$$\dot{u}(t) \;=\; \frac{CD}{(Dt+E)^2 + C^2\sin(\alpha)^2}$$

und nach Integration dann

$$(2) \qquad u(t) \;=\; \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\arctan\left(\frac{Dt+E}{C\sin\alpha}\right) + B.$$

Wie zu erwarten treten in den Gleichungen (1) und (2) vier freie Konstanten auf, die dann entweder durch Vorgabe von Anfangs- und Endpunkt oder aber durch Vorgabe von Anfangspunkt und Anfangsgeschwindigkeit der Geodätischen festgelegt werden. Das Vorzeichen von v gibt an, ob die Geodätische von unten nach oben oder von oben nach unten durchlaufen wird. Die Geodätischen auf dem Kegel sind dann die Kurven der Form

$$\alpha(t) \;=\; \begin{bmatrix} v(t)\cos\big(u(t)\big)\sin\alpha \\ v(t)\sin\big(u(t)\big)\sin\alpha \\ -v(t)\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Diese Kurven sind keine Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln, also keine Kegelschnitte, weswegen sie keine ebenen Kurven sein können (denn nur die Kegelschnitte kommen als Schnitte eines Kegels mit einer Ebene in Frage).

(b) Es seien S die Spitze des Kegels und P der Punkt der Lassoschlinge, an dem das freie Ende des Seils angreift. Wir schneiden den Kegel entlang der Leitlinie SP auf und wickeln ihn in eine Ebene ab. Die Lassoschlinge (die Teil einer Geodätischen auf dem Kegel ist) geht dabei in ein Stück einer Geodätischen in der Ebene (also einer Geraden) über. Beim Abwickeln geht der Kegel in einen Kreissektor mit dem Zentriwinkel $2\pi\sin(\alpha)$ über, und die Lassoschlinge geht über in das Geradenstück P_1P_2 über, bei dem P_1 und P_2 die Punkte auf den beiden Schenkeln sind, die dem Punkt P entsprechen. Dabei muß natürlich die Strecke P_1P_2 innerhalb des Kreissektors verlaufen, was offensichtlich nur möglich ist, wenn der Zentriwinkel des Sektors kleiner als 180^0 ist, wenn also $2\pi\sin(\alpha) < \pi$ bzw. $\sin(\alpha) < 1/2$ bzw. $\alpha < 30^0$ gilt. (Dies ist genau die Bedingung dafür, daß es auf dem Kegel Geodätische gibt, die sich selbst kreuzen.)

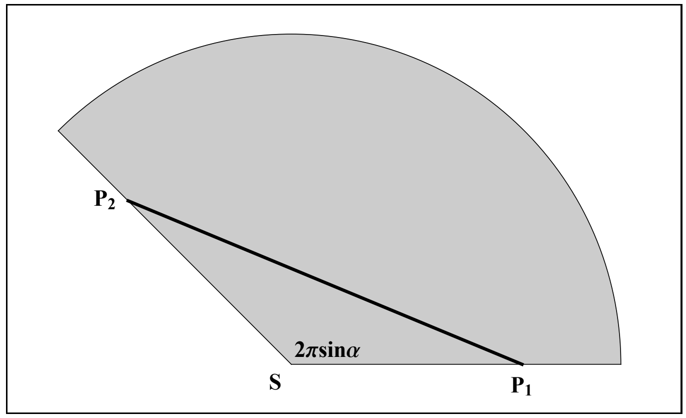

Abb. 5.5: Geradenstück, in das eine sich kreuzende Geodätische beim Abwickeln eines Kegels übergeht.

Löung (5.6) Der Torus ist ein Rotationskörper wie in Aufgabe (4.2) mit $f(v) = R+r\cos v$ und $g(v) = r\sin v$. Wie in Aufgabe (4.6) beschrieben, liefert eine der geodätischen Gleichungen die Clairautsche Relation $f(v)^2\dot{u} = C$ mit einer Konstanten C, die sich in der Form

$$\rho\cos(\theta) \;=\; C$$

schreiben läßt, wenn ρ den Radius eines Breitenkreises bezeichnet und θ den Winkel, unter dem die Geodätische diesen Breitenkreis schneidet. (Wir werden nur mit dieser Relation arbeiten, weil sich die Differentialgleichung für die Geodätischen beim Torus nicht mit Hilfe elementarer Funktionen integrieren läßt, weil das Integral

$$u \;=\; \int \frac{Cr}{(R+r\cos v)\sqrt{(R+r\cos v)^2 - C^2}}\,\mathrm{d}v$$

nicht elementar lösbar ist.) Am Anfangspunkt der betrachteten Geodätischen haben wir $\rho = R$ und $\theta = 0$, folglich $C = R$ und damit $\rho\cos(\theta) = R$ an jedem Punkt der Geodätischen. Dies liefert $\rho \geq R$; die Geodätische kann also nur auf der Außenseite des Torus verlaufen, die durch die Bedingung $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ charakterisiert ist. Je weiter nach außen die Kurve vordringt, desto größer wird ρ, also auch θ. Ab dem Augenblick, zu dem der Äquator $v = 0$ erreicht wird, nimmt ρ (und damit auch θ) wieder ab, und zwar so lange, bis der untere Rand $v = -\pi/2$ erreicht ist. An diesem unteren Rand gilt wieder $\theta = 0$; die Geodätische berührt also diesen unteren Rand, um dann wieder nach oben zu laufen. Insgesamt oszilliert die Geodätische zwischen den Kreisen $v = \pi/2$ und $v = -\pi/2$.

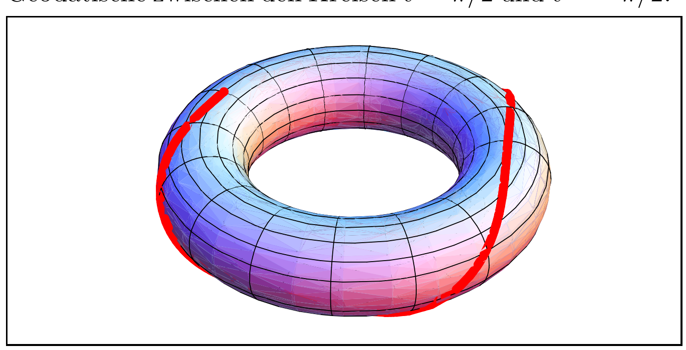

Abb. 5.6: Geodätische Kurve auf dem Torus, die tangential zum Breitenkreis $v = \pi/2$ beginnt.