4. Lösung zur Differentialgeometrie: Christoffelsymbole und geodätische Kurven

Lösung (4.1) Bei dieser Aufgabe wird die Lösung notationstechnisch kürzer, wenn man sie allgemeiner hinschreibt. Wir betrachten also zunächst eine beliebige Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ mit dem mitbewegten Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_{n-1}, N)$ und haben die Gleichungen

$$(\star) \qquad x_{ij} \;=\; \sum_{\ell=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^{\ell} x_\ell \,+\, h_{ij} N, \qquad N_i \;=\; \sum_{\ell=1}^{n-1} a_{\ell i} x_\ell$$

mit $(a_{ij}) = -(g_{ij})^{-1}(h_{ij})$. Ableiten der ersten Gleichung in $(\star)$ nach dem k-ten Parameter liefert

$$\begin{aligned} x_{ijk} \;&=\; \sum_{\ell=1}^{n-1} \left((\partial_k \Gamma_{ij}^{\ell}) x_\ell + \Gamma_{ij}^{\ell} x_{\ell k} \right) \,+\, (\partial_k h_{ij}) N + h_{ij} N_k \\ &=\; \sum_{\ell=1}^{n-1} \left((\partial_k \Gamma_{ij}^{\ell}) x_\ell + \Gamma_{ij}^{\ell} \left[\sum_{m=1}^{n-1} \Gamma_{\ell k}^{m} x_m + h_{\ell k} N \right] \right) \\ &\qquad\qquad + (\partial_k h_{ij}) N + h_{ij} \sum_{\ell=1}^{n-1} a_{\ell k} x_\ell \\ &=\; \sum_{\ell=1}^{n-1} \left((\partial_k \Gamma_{ij}^{\ell}) + \sum_{m=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^{m} \Gamma_{mk}^{\ell} + h_{ij} a_{\ell k} \right) x_\ell \\ &\qquad\qquad + \left((\partial_k h_{ij}) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^{\ell} h_{\ell k} \right) N, \end{aligned}$$

wobei wir bei der letzten Umformung bei der auftretenden Doppelsumme eine Indexumbenennung $(m, \ell) \to (\ell, m)$ durchführten. Analog liefert Ableiten der zweiten Gleichung in $(\star)$ nach dem j-ten Parameter die Gleichung

$$\begin{aligned} N_{ij} \;&=\; \sum_{\ell=1}^{n-1} \left((\partial_j a_{\ell i}) x_\ell + a_{\ell i} x_{\ell j} \right) \\ &=\; \sum_{\ell=1}^{n-1} \left((\partial_j a_{\ell i}) x_\ell + a_{\ell i} \left[\sum_{m=1}^{n-1} \Gamma_{\ell j}^{m} x_m + h_{\ell j} N \right] \right) \\ &=\; \sum_{\ell=1}^{n-1} \left((\partial_j a_{\ell i}) + \sum_{m=1}^{n-1} a_{mi} \Gamma_{mj}^{\ell} \right) x_\ell + \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} a_{\ell i} h_{\ell j} \right) N. \end{aligned}$$

Da sich bei einer beliebigen Vertauschung der Indices i, j, k nach dem Satz von Schwarz die Ausdrücke x_{ijk} und N_{ij} nicht ändern, erhalten wir also die folgenden Verträglichkeitsbedingungen: alle Ausdrücke

$$(\partial_k \Gamma_{ij}^{\ell}) + \sum_{m=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^{m} \Gamma_{mk}^{\ell} + h_{ij} a_{\ell k} \quad \text{und} \quad (\partial_k h_{ij}) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^{\ell} h_{\ell k}$$

bleiben unter einer beliebigen Vertauschung der Indices i, j, k unverändert, und alle Ausdrücke

$$(\partial_j a_{\ell i}) + \sum_{m=1}^{n-1} a_{mi} \Gamma_{mj}^{\ell} \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{n-1} a_{\ell i} h_{\ell j}$$

bleiben unverändert unter einer Vertauschung der Indices i und j. (Die letzte Bedingung drückt dabei nur aus, daß die Matrix $(h_{ij})(a_{ij}) = -(h_{ij})(g_{ij})^{-1}(h_{ij})$ symmetrisch ist, was ohnehin klar ist, weil mit zwei Matrizen P und Q das Produkt QPQ auch wieder symmetrisch ist. Diese Bedingung liefert also keine neue Information.) Wir werten die ersten Bedingungen nun für die Gleichung $x_{iij} = x_{iji}$ aus und erhalten

$$(\partial_j \Gamma_{ii}^{\ell}) + \sum_{m=1}^{n-1} \Gamma_{ii}^{m} \Gamma_{mj}^{\ell} + h_{ii} a_{\ell j} = (\partial_i \Gamma_{ij}^{\ell}) + \sum_{m=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^{m} \Gamma_{mi}^{\ell} + h_{ij} a_{\ell i}$$

sowie

$$(\partial_j h_{ii}) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \Gamma_{ii}^{\ell} h_{\ell j} \;=\; (\partial_i h_{ij}) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^{\ell} h_{\ell i}.$$

Erst jetzt spezialisieren wir diese Gleichungen auf den Fall $n = 3$ und erhalten

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(\partial_j \Gamma_{ii}^{\ell}) + \Gamma_{ii}^{1} \Gamma_{1j}^{\ell} + \Gamma_{ii}^{2} \Gamma_{2j}^{\ell} + h_{ii} a_{\ell j} \\ &= (\partial_i \Gamma_{ij}^{\ell}) + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1i}^{\ell} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2i}^{\ell} + h_{ij} a_{\ell i} \end{aligned}$$

sowie

$$(2) \quad (\partial_j h_{ii}) + \Gamma_{ii}^{1} h_{1j} + \Gamma_{ii}^{2} h_{2j} \;=\; (\partial_i h_{ij}) + \Gamma_{ij}^{1} h_{1i} + \Gamma_{ij}^{2} h_{2i}.$$

Wir wählen nun $i = 1$ und $j = 2$ und schreiben wie üblich u und v statt u_1 und u_2. Für $\ell = 1$ erhalten wir aus (1) dann

$$\begin{aligned} &(\partial_v \Gamma_{11}^{1}) + \Gamma_{11}^{1} \Gamma_{12}^{1} + \Gamma_{11}^{2} \Gamma_{22}^{1} + h_{11} a_{12} \\ &= (\partial_u \Gamma_{12}^{1}) + \Gamma_{12}^{1} \Gamma_{11}^{1} + \Gamma_{12}^{2} \Gamma_{21}^{1} + h_{12} a_{11}, \end{aligned}$$

wegen $a_{12} = (Fg - Gf)/(EG - F^2)$ und $a_{11} = (Ff - Ge)/(EG - F^2)$ also

$$\begin{aligned} &(\partial_v \Gamma_{11}^{1}) + \Gamma_{11}^{2} \Gamma_{22}^{1} + e\,(Fg - Gf)/(EG - F^2) \\ &= (\partial_u \Gamma_{12}^{1}) + \Gamma_{12}^{2} \Gamma_{12}^{1} + f\,(Ff - Ge)/(EG - F^2). \end{aligned}$$

Für $\ell = 2$ erhalten wir (wieder mit $i = 1$ und $j = 2$) aus (1) dagegen

$$\begin{aligned} &(\partial_v \Gamma_{11}^{2}) + \Gamma_{11}^{1} \Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{11}^{2} \Gamma_{22}^{2} + e(Ff - Eg)/(EG - F^2) \\ &= (\partial_u \Gamma_{12}^{2}) + \Gamma_{12}^{1} \Gamma_{11}^{2} + \Gamma_{12}^{2} \Gamma_{12}^{2} + f(Fe - Ef)/(EG - F^2)\,. \end{aligned}$$

Bedingung (2) liefert ferner

$$(\partial_v h_{11}) + \Gamma_{11}^{1} h_{12} + \Gamma_{11}^{2} h_{22} \;=\; (\partial_u h_{12}) + \Gamma_{12}^{1} h_{11} + \Gamma_{12}^{2} h_{21},$$

also

$$(\partial_v e) + f\,\Gamma_{11}^{1} + g\,\Gamma_{11}^{2} \;=\; (\partial_u f) + e\,\Gamma_{12}^{1} + f\,\Gamma_{12}^{2}.$$

Analoge Beziehungen ergeben sich aus den übrigen Gleichungen. Die resultierenden Verträglichkeitsbedingungen sind unter der Bezeichnung **Gauß-Mainardi-Codazzi-Gleichungen** bekannt.

Lösung (4.2) Wir haben

$$x_u = \begin{bmatrix} -f(v)\sin(u) \\ f(v)\cos(u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x_v = \begin{bmatrix} f'(v)\cos(u) \\ f'(v)\sin(u) \\ g'(v) \end{bmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \langle x_u, x_u\rangle & \langle x_u, x_v\rangle \\ \langle x_v, x_u\rangle & \langle x_v, x_v\rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(v)^2 & 0 \\ 0 & f'(v)^2 + g'(v)^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir

$$x_{uu} = \begin{bmatrix} -f(v)\cos(u) \\ -f(v)\sin(u) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{uv} = \begin{bmatrix} -f'(v)\sin(u) \\ f'(v)\cos(u) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{und} \quad x_{vv} = \begin{bmatrix} f''(v)\cos(u) \\ f''(v)\sin(u) \\ g''(v) \end{bmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \langle x_{uu}, x_u\rangle & \langle x_{uv}, x_u\rangle & \langle x_{vv}, x_u\rangle \\ \langle x_{uu}, x_v\rangle & \langle x_{uv}, x_v\rangle & \langle x_{vv}, x_v\rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E & F \\ f & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & ff' & 0 \\ -ff' & 0 & f'f''+g'g'' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/f^2 & 0 \\ 0 & 1/\big((f')^2+(g')^2\big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & ff' & 0 \\ -ff' & 0 & f'f''+g'g'' \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{f'}{f} & 0 \\ \dfrac{-ff'}{(f')^2+(g')^2} & 0 & \dfrac{f'f''+g'g''}{(f')^2+(g')^2} \end{bmatrix},$$

wobei wir aus Platzgründen bei den Funktionen f, f', f'', g', g'' jeweils das Argument v wegließen. (**Verständnisfrage:** Warum war von vornheren klar, daß die erste Fundamentalform und die Christoffelsymbole der Rotationsfläche nur von v und nicht von u abhängen würden?)

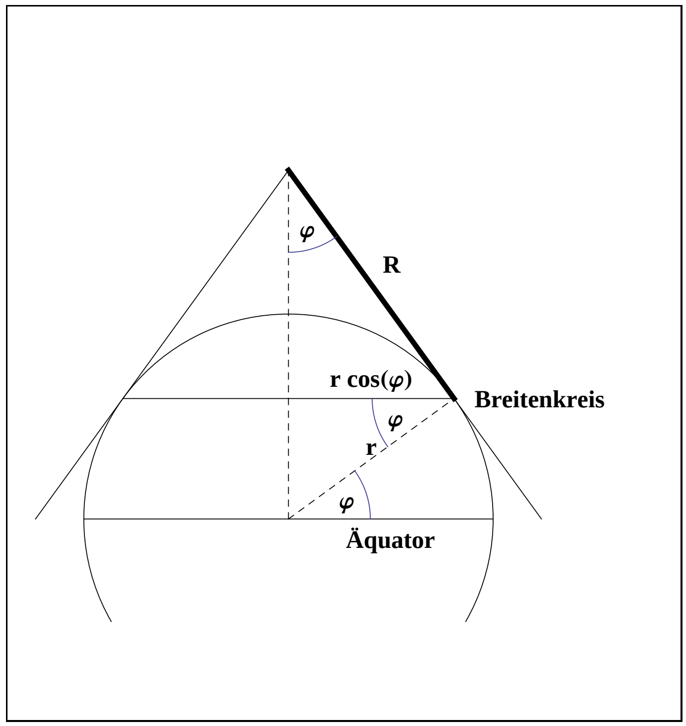
Lösung (4.3) Wir schreiben $n_{\dot{v}} := \langle \dot{v}, N\rangle N$ und $n_{\dot{w}} := \langle \dot{w}, N\rangle N$ für die Anteile von $\dot{v}$ und $\dot{w}$ in Normalenrichtung. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle v, w\rangle &= \langle \dot{v}, w\rangle + \langle v, \dot{w}\rangle \\ &= \langle \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} + n_{\dot{v}}, w\rangle + \langle v, \frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} + n_{\dot{w}}\rangle \\ &= \langle \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}, w\rangle + \langle v, \frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}\rangle, \end{aligned}$$

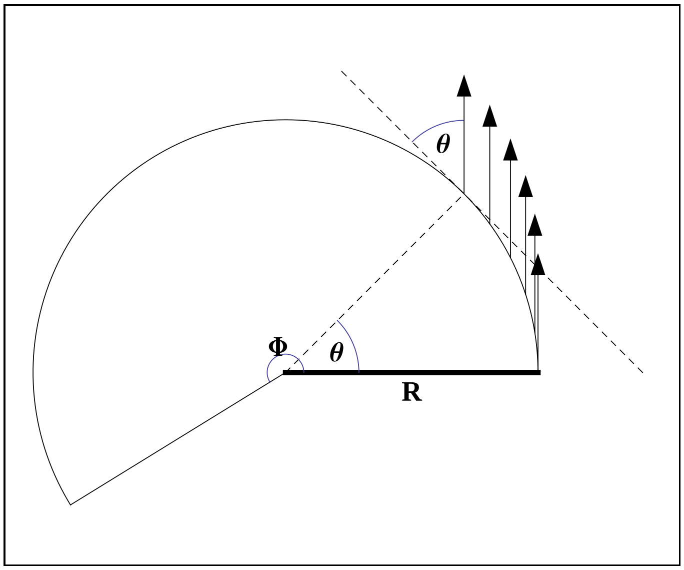
wobei die letzte Gleichung gilt, weil $\langle v, N\rangle = \langle w, N\rangle = 0$ gilt. Sind v und w parallel entlang α, so haben wir $\mathrm{D}v/\mathrm{D}t = \mathrm{D}w/\mathrm{D}t = 0$; die gerade erhaltene Gleichung geht dann über in $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\langle v(t), w(t)\rangle = 0$ und zeigt, daß die Funktion $t \mapsto \langle v(t), w(t)\rangle$ konstant ist.

Wenden wir diese Beobachtung mit $w := v$ an, so erkennen wir, daß $t \mapsto \langle v(t), v(t)\rangle = \|v(t)\|^2$ und damit $t \mapsto \|v(t)\|$ konstant ist. Analog ist $t \mapsto \|w(t)\|$ konstant. Bezeichnet nun $\varphi(t)$ den Winkel zwischen $v(t)$ und $w(t)$, so ist daher auch $\langle v, w\rangle/(\|v\|\,\|w\|) = \cos\varphi$ konstant, folglich auch $t \mapsto \varphi(t)$.

Lösung (4.4) Wir errichten den Kegel mit Spitze über dem Nordpol der Sphäre, der die Sphäre in dem betrachteten Breitenkreis (Breitengrad φ) gerade berührt. Die folgende Abbildung zeigt einen Querschnitt durch die Sphäre und den Kegel.



Da Großkreise geodätische Kurven einer Sphäre sind, bleibt bei Parallelverschiebung eines Vektors entlang eines Großkreises der Winkel dieses Vektors zur Tangentenrichtung des Großkreises konstant. Es bleibt die Parallelveerschiebung entlang des Breitenkreises zu untersuchen. Da allgemein die Parallelverschiebung entlang einer Kurve auf einer Fläche nur vom Normalenvektor dieser Fläche entlang der Kurve abhängt, ist es egal. ob wir die Parallelverschiebung entlang des Breitenkreises auf der Sphäre oder auf dem Kegel vornehmen. Den Kegel können wir uns aber aufgeschnitten und in eine Ebene abgewickelt denken; die Parallelverschiebung auf dem Kegel ist dann die übliche Parallelverschiebung in dieser Abwickelebene. Beim Abwickeln wird der Kegel zu einem Kreissektor mit einem Radius R und einem Winkel Φ, die gegeben sind durch die Gleichungen $\sin\varphi = (r\cos\varphi)/R$ bzw. $R = r\cot\varphi$ sowie $\Phi R = 2\pi r\cos\varphi$ bzw. $\Phi = 2\pi\sin\varphi$. Eine Bewegung um den Winkel θ in diesem Kreissektor entspricht dabei einer Längengradsänderung Δ entlang des Breitenkreises, die gegeben ist durch $R\theta = (r\cos\varphi)\cdot\Delta$ bzw. $\theta = \Delta\cdot\sin\varphi$. Wir beobachten nun, daß bei einer Drehung θ (bzw. einer Längengradänderung $\Delta = \theta/\sin\varphi$) der parallelverschobene Vektor seine Orientierung gegenüber der Tangentenrichtung um den Winkel $\theta = \Delta\sin\varphi$ ändert.



Ist also die Differenz zwischen den Längengraden von p und q gleich Δ, so erleidet der betrachtete Vektor bei seiner Parallelverschiebung eine Winkeländerung $\theta = \Delta\sin\varphi$. Bei einer vollen Umrundung des Breitenkreises ist diese Winkeländerung also gleich $2\pi\sin\varphi$.

Lösung (4.5) Drücken wir die Christoffelsymbole durch die angegebenen Gleichungen aus und setzen die Ergebnisse in die Gleichungen $(\star)$ für die Geodätischen ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 2(EG-F^2)\ddot{u} + G\cdot\Phi - F\cdot\Psi, \\ 0 &= 2(EG-F^2)\ddot{v} - F\cdot\Phi + E\cdot\Psi, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Phi &:= E_u\dot{u}^2 + 2E_v\dot{u}\dot{v} + (2F_v - G_u)\dot{v}^2, \\ \Psi &:= (2F_u - E_v)\dot{u}^2 + 2G_u\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2 \end{aligned}$$

benutzen. Gleichung (1) läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + \frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$2\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Ableiten der Gleichung $E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 = \text{const}$ liefert andererseits

$$\begin{aligned} 0 &= (E_u\dot{u} + E_v\dot{v})\dot{u}^2 + 2E\dot{u}\ddot{u} \\ &\quad + 2(F_u\dot{u} + F_v\dot{v})\dot{u}\dot{v} + 2F(\ddot{u}\dot{v} + \dot{u}\ddot{v}) \\ &\quad + (G_u\dot{u} + G_v\dot{v})\dot{v}^2 + 2G\dot{v}\ddot{v} \end{aligned}$$

bzw. $2(E\dot{u} + F\dot{v})\ddot{u} + 2(F\dot{u} + G\dot{v})\ddot{v} + \dot{u}\Phi + \dot{v}\Psi = 0$, also

$$2\langle\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix}\rangle + \langle\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix}\rangle = 0$$

bzw.

$$\langle\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}, 2\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix}\rangle = 0. \tag{3}$$

Zu zeigen ist nun, daß unter Voraussetzung von (3) das Erfülltsein einer der beiden Komponentengleichungen in (2) schon das Erfülltsein der jeweils anderen Komponentengleichung nach sich zieht. Das läuft aber einfach auf die Aussage hinaus, daß aus $\xi_1 = 0$ oder $\xi_2 = 0$ und

$$0 = \langle\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}\rangle = a\xi_1 + b\xi_2$$

mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ schon $\xi_1 = \xi_2 = 0$ folgt, und das ist offensichtlich.

Lösung (4.6) (a) Setzen wir die in Aufgabe (4.2) ermittelten Christoffelsymbole in die Differentialgleichung für die Geodätischen ein, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{u} + \frac{2f(v)f'(v)}{f(v)^2}\dot{u}\dot{v}, \\ 0 &= \ddot{v} - \frac{f(v)f'(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2}\dot{u}^2 + \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2}\dot{v}^2. \end{aligned}$$

(b) Bei einem Meridian $u = \text{const}$ ist die erste Gleichung in (a) automatisch erfüllt. Bei der zweiten Gleichung dürfen wir annehmen, daß der Meridian nach der Bogenlänge parametrisiert ist, daß also für

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} f\big(v(t)\big)\cos u \\ f\big(v(t)\big)\sin u \\ g\big(v(t)\big) \end{bmatrix}$$

die Gleichung $1 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 = \big(f'(v)^2 + g'(v)^2\big)\dot{v}^2$ und damit

$$\dot{v}^2 = \frac{1}{f'(v)^2 + g'(v)^2}$$

gilt. Ableiten dieser Gleichung liefert

$$\begin{aligned} 2\dot{v}\ddot{v} &= \frac{-2\big(f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)\big)}{\big(f'(v)^2 + g'(v)^2\big)^2}\dot{v} \\ &= \frac{-2\big(f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)\big)}{f'(v)^2 + g'(v)^2}\dot{v}^3 \end{aligned}$$

bzw.

$$\ddot{v} \;=\; -\frac{f'(v)f''(v)+g'(v)g''(v)}{f'(v)^2+g'(v)^2}\,\dot{v}^2.$$

Wegen $\dot{u}=0$ ist damit die zweite Gleichung in (a) ebenfalls erfüllt. Dies zeigt, daß jeder Meridian eine geodätische Kurve ist.

(c) Bei einem Breitenkreis $v=\text{const}$ ist $\dot{v}=0$, die zweite der Gleichungen in (a) damit genau dann erfüllt, wenn $f'(v)=0$ gilt. In diesem Fall ist dann die erste Gleichung ebenfalls erfüllt, wenn $\dot{u}$ konstant ist. Der Breitenkreis zum Parameterwert v ist also genau dann eine geodätische Kurve, wenn $f'(v)=0$ gilt, wenn also die Tangente an die rotierende Kurve parallel zur Rotationsachse ist.

(d) Die erste Gleichung in (a) läßt sich umschreiben als

$$0 \;=\; f(v)^2\ddot{u}+2f(v)f'(v)\dot{v}\dot{u} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(v)^2\dot{u}\big)$$

bzw. $f(v)^2\dot{u}=C$ mit einer Konstanten C. Wie wir in Aufgabe (4.5) sahen, ist die zweite Gleichung in (a) automatisch erfüllt, wenn die Geodätische nach ihrer Bogenlänge parametrisiert ist, wenn also

$$\begin{aligned} 1 &= E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2 \\ &= f(v)^2\dot{u}^2+\big(f'(v)^2+g'(v)^2\big)\dot{v}^2 \\ &= C^2/f(v)^2+\big(f'(v)^2+g'(v)^2\big)\dot{v}^2 \end{aligned}$$

bzw. $\dot{v}^2=\big(1-C^2/f(v)^2\big)/\big(f'(v)^2+g'(v)^2\big)$. Dann ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2 \;=\; \frac{\dot{u}^2}{\dot{v}^2} \;=\; \frac{C^2\big(f'(v)^2+g'(v)^2\big)}{f(v)^4\big(1-C^2/f(v)^2\big)}\,.$$

Die gesuchten Geodätischen ergeben sich also durch Bestimmung des Integrals

$$u \;=\; \int \frac{C\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}}{f(v)\sqrt{f(v)^2-C^2}}\,\mathrm{d}v\,.$$

(e) Der Winkel θ zwischen der Geodätischen und dem Breitenkreis $v=\text{const}$ ist gegeben durch die Gleichung

$$\cos\theta \;=\; \frac{|\langle x_u, x_u\dot{u}+x_v\dot{v}\rangle|}{\|x_u\|} \;=\; \frac{|\,\|x_u\|\dot{u}+\langle x_u,x_v\rangle\dot{v}\,|}{\|x_u\|},$$

wobei wir annehmen, daß $\|x_u\dot{u}+x_v\dot{v}\|=1$ gilt, daß also die betrachtete geodätische Kurve nach ihrer Bogenlänge parametrisiert ist. Wegen

$$x=\begin{bmatrix} f(v)\cos u \\ f(v)\sin u \\ g(v)\end{bmatrix},\; x_u=\begin{bmatrix} -f(v)\sin u \\ f(v)\cos u \\ 0\end{bmatrix},\; x_v=\begin{bmatrix} f'(v)\cos u \\ f'(v)\sin u \\ g'(v)\end{bmatrix}$$

geht diese Gleichung über in $\cos\theta=\|x_u\|\,|\dot{u}|=f(v)|\dot{u}|$. Da nach Teil (d) die Beziehung $\dot{u}=C/f(v)^2$ mit einer Konstanten C gilt, ergibt sich die Clairautsche Relation.