3. Lösung zur Differentialgeometrie: Flächen im Raum

Lösung (3.1) (a) Da der Einheitsnormalenvektor einer Ebene konstant ist, besteht das Normalenbild einer Ebene aus einem einzigen Punkt der Sphäre $\mathbb{S}^2$.

(b) Bei einem Zylinder ist der Normalenvektor entlang jeder Leitlinie konstant, während er senkrecht eine Drehung um einen Vollwinkel ausführt. Das Normalenbild eines Zylinders (mit beliebigem Radius) ist also ein Großkreis auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$.

(c) Der Kegel mit Öffnungswinkel α, der die z-Achse als Symmetrieachse hat, ist gegeben durch die Gleichung $z = \cot(\alpha)\sqrt{x^2+y^2}$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. (Der Nullpunkt wird herausgenommen, um die Singularität an der Kegelspitze zu entfernen.) Wir erhalten also die Parameterdarstellung $(x,y) \mapsto (x, y, \cot(\alpha)\sqrt{x^2+y^2})$, und dann ein Einheitsnormalenfeld, indem wir den Vektor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x\cot(\alpha)/\sqrt{x^2+y^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ y\cot(\alpha)/\sqrt{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

auf Länge 1 normieren; dies liefert

$$N(x,y) \;=\; \begin{bmatrix} -x\cos(\alpha)/\sqrt{x^2+y^2} \\ -y\cos(\alpha)/\sqrt{x^2+y^2} \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Das Normalenbild des Kegels ergibt sich mit $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ dann zu

$$\{N(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\} \;=\; \{\begin{bmatrix} -\cos(\varphi)\cos(\alpha) \\ -\sin(\varphi)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R}\};$$

dies ist der Breitenkreis zum Breitengrad α.

(d) Die Parametrisierung $(x,y) \mapsto (x, y, x^2+y^2)$ liefert das Einheitsnormalenfeld

$$N(x,y) = \frac{1}{\|\cdot\|}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{bmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\begin{bmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Das gesuchte Normalenbild ist die Menge all dieser Vektoren $N(x,y)$, also die Menge

$$\{\begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{bmatrix} \mid u^2+v^2 < 1\};$$

dies ist gerade die obere Hemisphäre von $\mathbb{S}^2$.

(e) Eine Parametrisierung ist gegeben durch $(t,\varphi) \mapsto \big(\cosh(t)\cos(\varphi), \cosh(t)\sin(\varphi), \sinh(t)\big)$. Ein Einheitsnormalenfeld erhalten wir, indem wir den Vektor

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \sinh(t)\cos(\varphi) \\ \sinh(t)\sin(\varphi) \\ \cosh(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\cosh(t)\sin(\varphi) \\ \cosh(t)\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \\ =\;& \cosh(t)\begin{bmatrix} -\cosh(t)\cos(\varphi) \\ -\cosh(t)\sin(\varphi) \\ \sinh(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

auf Länge 1 normieren; wir erhalten

$$N(t,\varphi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\cosh(t)^2+\sinh(t)^2}}\begin{bmatrix} -\cosh(t)\cos(\varphi) \\ -\cosh(t)\sin(\varphi) \\ \sinh(t) \end{bmatrix}.$$

Das Normalenbild ist die Menge all dieser Vektoren $N(t,\varphi)$. Setzen wir $u := \cosh(t)$, so ist $\sinh(t)^2 = \cosh(t)^2 - 1 = u^2 - 1$ und damit

$$N \;=\; \frac{1}{\sqrt{2u^2-1}}\begin{bmatrix} -u\cos(\varphi) \\ -u\sin\varphi(\varphi) \\ \pm\sqrt{u^2-1} \end{bmatrix}.$$

Da der Ausdruck $u/\sqrt{2u^2-1}$ alle Werte im Intervall $(1/\sqrt{2}, 1]$ annehmen kann, ist das Normalenbild die Menge aller Punkte von $\mathbb{S}^2$, deren Projektion auf die xy-Ebene vom Punkt $(0,0)$ einen Abstand größer als $1/\sqrt{2}$ hat. Das Normalenbild ist also die Vereinigung zweier Kugelkappen.

(f) Eine Parametrisierung ist gegeben durch $(u,v) \mapsto \big(\cosh(v)\cos(u), \cosh(v)\sin(u), v\big)$. Ein Einheitsnormalenfeld ergibt sich durch Normieren von

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -\cosh(v)\sin(u) \\ \cosh(v)\cos(u) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sinh(v)\cos(u) \\ \sinh(v)\sin(u) \\ 1 \end{bmatrix} \\ =\;& \cosh(v)\begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ -\sinh(v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

zu

$$N(u,v) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\sinh(v)^2}}\begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ -\sinh(v) \end{bmatrix}.$$

Die Menge all dieser Normalenvektoren ist gerade $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, wenn wir mit N und S den Nord- und den Südpol bezeichnen.

Lösung (3.2) (a) Wir haben

$$x_u = \begin{bmatrix} -(R+r\cos v)\sin u \\ (R+r\cos v)\cos u \\ 0 \end{bmatrix} \quad\text{und}\quad x_v = \begin{bmatrix} -r\sin v\cos u \\ -r\sin v\sin u \\ r\cos v \end{bmatrix}$$

und folglich

$$N \;=\; \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} \;=\; \begin{bmatrix} \cos v\cos u \\ \cos v\sin u \\ \sin v \end{bmatrix}.$$

Für die erste Fundamentalform ergibt sich daher

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_u, x_u\rangle & \langle x_u, x_v\rangle \\ \langle x_v, x_u\rangle & \langle x_v, x_v\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R+r\cos v)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

Weiter erhalten wir

$$N = \begin{bmatrix} \cos v\cos u \\ \cos v\sin u \\ \sin v \end{bmatrix}, \quad x_{uu} = \begin{bmatrix} -(R+r\cos v)\cos u \\ -(R+r\cos v)\sin u \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x_{uv} = \begin{bmatrix} r\sin v\sin u \\ -r\sin v\cos u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{vv} = \begin{bmatrix} -r\cos v\cos u \\ -r\cos v\sin u \\ -r\sin v \end{bmatrix}$$

und als Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform daher

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \langle x_{uu}, N\rangle & \langle x_{uv}, N\rangle \\ \langle x_{vu}, N\rangle & \langle x_{vv}, N\rangle \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} (R+r\cos v)\cos v & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Gaußsche Krümmung ergibt sich

$$K = \frac{r\cos v(R+r\cos v)}{r^2(R+r\cos v)^2} = \frac{\cos v}{r(R+r\cos v)}.$$

(b) Wir erhalten

$$x_u = \begin{bmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ d \end{bmatrix} \text{ sowie } x_v = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix}$$

und damit

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_u, x_u\rangle & \langle x_u, x_v\rangle \\ \langle x_v, x_u\rangle & \langle x_v, x_v\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^2+d^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ferner erhalten wir

$$x_{uu} = \begin{bmatrix} -v\cos u \\ -v\sin u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{uv} = \begin{bmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x_{vv} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N = \frac{1}{\sqrt{d^2+v^2}} \begin{bmatrix} -d\sin u \\ d\cos u \\ -v \end{bmatrix}$$

und damit

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_{uu}, N\rangle & \langle x_{uv}, N\rangle \\ \langle x_{vu}, N\rangle & \langle x_{vv}, N\rangle \end{bmatrix} = \frac{d}{\sqrt{d^2+v^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

die Gaußsche Krümmung ist $K = -d^2/(d^2+v^2)^2$.

(c) Wir erhalten

$$x_u = \begin{bmatrix} -\varphi(v)\sin u \\ \varphi(v)\cos u \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x_v = \begin{bmatrix} \varphi'(v)\cos u \\ \varphi'(v)\sin u \\ \psi'(v) \end{bmatrix}$$

und damit

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_u, x_u\rangle & \langle x_u, x_v\rangle \\ \langle x_v, x_u\rangle & \langle x_v, x_v\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(v)^2 & 0 \\ 0 & \varphi'(v)^2+\psi'(v)^2 \end{bmatrix}$$

als Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform. Ferner erhalten wir

$$x_{uu} = \begin{bmatrix} -\varphi(v)\cos u \\ -\varphi(v)\sin u \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_{uv} = \begin{bmatrix} -\varphi'(v)\sin u \\ \varphi'(v)\cos u \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x_{vv} = \begin{bmatrix} \varphi''(v)\cos u \\ \varphi''(v)\sin u \\ \psi''(v) \end{bmatrix}, \; N = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(v)^2+\psi'(v)^2}} \begin{bmatrix} \psi'(v)\cos u \\ \psi'(v)\sin u \\ -\varphi'(v) \end{bmatrix}$$

und als Matrix für die zweite Fundamentalform daher

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_{uu}, N\rangle & \langle x_{uv}, N\rangle \\ \langle x_{vu}, N\rangle & \langle x_{vv}, N\rangle \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi'(v)^2+\psi'(v)^2}} \begin{bmatrix} -\varphi(v)\psi'(v) & 0 \\ 0 & \psi'(v)\varphi''(v)-\varphi'(v)\psi''(v) \end{bmatrix}$$

sowie als Gaußsche Krümmung schließlich

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{\psi'(v)\big(\varphi'(v)\psi''(v)-\varphi''(v)\psi'(v)\big)}{\varphi(v)\big(\varphi'(v)^2+\psi'(v)^2\big)^2}.$$

(Daß K nur von v und nicht von u abhängen würde, war aufgrund der Rotationssymmetrie von vornherein klar.)

Lösung (3.3) Da die Kurve α ganz in M verläuft, gilt $\langle \alpha'(s), N\big(\alpha(s)\big)\rangle = 0$ für alle s. Ableiten dieser Identität liefert

$$0 = \langle \alpha''(s), N\big(\alpha(s)\big)\rangle + \langle \alpha'(s), N'\big(\alpha(s)\big)\alpha'(s)\rangle.$$

Mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = v$ gilt dann also

$$0 = \langle \alpha''(0), N(p)\rangle + \langle v, N'(p)v\rangle.$$

Da α nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $\alpha'' = \kappa n$, wenn κ die Krümmung und n den Hauptnormalenvektor der Kurve bezeichnet. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle v, \mathfrak{C}_p v\rangle &= \langle v, -N'(p)v\rangle \\ = \langle \alpha''(0), N(p)\rangle &= \langle \kappa(p)n(p), N(p)\rangle, \end{aligned}$$

und das ist schon die Behauptung.

Lösung (3.4) Es sei $\varphi : U \to M$ eine lokale Parametrisierung mit $\varphi(u^{(0)}) = p$. Wir betrachten die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, die definiert wird durch

$$f(u) := \langle \varphi(u) - p,\, N(p)\rangle.$$

Diese Funktion beschreibt den orientierten Abstand des Punktes $\varphi(u)$ von T_pM, gibt also an, wie man sich auf der Hyperfläche M von $p+T_pM$ entfernt, wenn man sich vom Punkt p wegbewegt. Schreiben wir $x_i := (\partial\varphi/\partial u_i)(u^{(0)})$

und $x_{ij} := (\partial^2\varphi/\partial u_i \partial u_j)(u^{(0)})$, so erhalten wir die Taylorentwicklung

$$f(u^{(0)}+\Delta u) \;=\; \langle \sum_i x_i \Delta u_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_{ij}\Delta u_i \Delta u_j + R, N(p)\rangle,$$

wobei R den Taylorrest bezeichnet. Da $N(p)$ senkrecht auf T_pM steht, haben wir $\langle x_i, N(p)\rangle = 0$ für alle i; ferner bilden die Zahlen $h_{ij} := \langle x_{ij}, N(p)\rangle$ gerade die Matrixkoeffizienten der zweiten Fundamentalform. Also ist

$$\begin{aligned} f(u^{(0)}+\Delta u) \;&=\; \frac{1}{2}\sum_{i,j} h_{ij}\Delta u_i \Delta u_j + \langle R,\, N(p)\rangle \\ &=\; \frac{1}{2}\langle \Delta u, \mathfrak{C}_p \Delta u\rangle + \text{Terme höherer Ordnung.} \end{aligned}$$

(a) Ist $\mathfrak{C}_p$ positiv bzw. negativ definit, so folgt hieraus $f(u^{(0)}+\Delta u) > 0 = f(u^{(0)})$ bzw. $f(u^{(0)}+\Delta u) < 0 = f(u^{(0)})$ für $\|\Delta u\| > 0$ genügend klein; in einer Umgebung von $f(u^{(0)}) = p$ liegt dann M strikt auf einer Seite von T_pM.

(b) Ist $\mathfrak{C}_p$ indefinit, so folgt hieraus, daß $f(u^{(0)}+\Delta u)$ für beliebig kleine Werte von $\|\Delta u\| > 0$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt; jede Umgebung von $f(u^{(0)}) = p$ in M enthält dann also Punkte auf beiden Seiten von T_pM.

(c) Die Lösung zu Aufgabe (3.2)(a) zeigt, daß die Gaußsche Krümmung K nur entlang der Breitenkreise $v = \pm\pi/2$ den Wert 0 annimmt; für $-\pi/2 < v < \pi/2$ (also auf der Außenseite des Torus) gilt $K > 0$, für $\pi/2 < v < 3\pi/2$ (also auf der Innenseite des Torus) gilt dagegen $K < 0$. Dies entspricht völlig den in (a) und (b) erhaltenen Aussagen.

Lösung (3.5) Es sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung einer Umgebung W von M. (Es gelte also $W = \varphi(U)$ mit einem Parameterbereich $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$.) Schreiben wir $x_i := \partial\varphi/\partial u_i$ für $1 \le i \le n-1 =: d$, so gilt

$$\mu(W) = \int_U \|x_1(u)\times x_2(u)\times\cdots\times x_d(u)\|\,\mathrm{d}u\,.$$

Schreiben wir ferner $N_i := \partial(N\circ\varphi)/\partial u_i$ für $1 \le i \le d$, so gilt

$$\mu(N_W) \;=\; \int_U \|N_1(u)\times N_2(u)\times\cdots\times N_d(u)\|\,\mathrm{d}u\,.$$

Schreiben wir nun $N_i = \sum_{k=1}^d a_{ki}x_k$ (wobei die Matrix $(a_{ij}) = \big(a_{ij}(u)\big)$ die Matrixdarstellung des Krümmungsoperators $\mathfrak{C}_{\varphi(u)}$ bezüglich der Basis $(x_1,\ldots,x_d)$ ist), so erhalten wir

$$\begin{aligned} & N_1\times N_2\times\cdots\times N_d \\ &= (\sum_{k_1=1}^d a_{k_1 1}x_{k_1})\times(\sum_{k_2=1}^d a_{k_2 2}x_{k_2})\times\cdots\times(\sum_{k_d=1}^d a_{k_d d}x_{k_d}) \\ &= \sum_{k_1,\ldots,k_d=1}^d a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_d d}\,(x_{k_1}\times x_{k_2}\times\cdots\times x_{k_d}) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_d} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(d)d}\,(x_{\sigma(1)}\times x_{\sigma(2)}\times\cdots\times x_{\sigma(d)}) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_d} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(d)d}\;\mathrm{sign}(\sigma)\,(x_1\times x_2\times\cdots\times x_d) \\ &= \det(A)\,(x_1\times x_2\times\cdots\times x_d) \\ &= K\big(\varphi(u)\big)\,(x_1\times x_2\times\cdots\times x_d). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mu(N_W) \;=\; \int_U |K\big(\varphi(u)\big)|\,\|x_1(u)\times x_2(u)\times\cdots\times x_d(u)\|\,\mathrm{d}u\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es nun Punkte $\overline{u}, \widehat{u} \in U$ mit

$$\begin{aligned} &\mu(W) = \|x_1(\overline{u})\times x_2(\overline{u})\times\cdots\times x_d(\overline{u})\|\cdot\mu(U) \text{ und} \\ &\mu(N_W) = |K\big(\varphi(\widehat{u})\big)|\,\|x_1(\widehat{u})\times x_2(\widehat{u})\times\cdots\times x_d(\widehat{u})\|\cdot\mu(U) \end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{\mu(N_W)}{\mu(W)} = \frac{|K\big(\varphi(\widehat{u})\big)|\,\|x_1(\widehat{u})\times x_2(\widehat{u})\times\cdots\times x_d(\widehat{u})\|}{\|x_1(\overline{u})\times x_2(\overline{u})\times\cdots\times x_d(\overline{u})\|}\,.$$

Schrumpft nun W auf den Punkt $p = \varphi(u)$ zusammen, so haben wir $\overline{u}\to u$ und $\widehat{u}\to u$ und damit $\mu(N_W)/\mu(W) \to |K\big(\varphi(u)\big)| = |K(p)|$.

Lösung (3.6) (a) In Aufgabe (3.2)(b) erhielten wir schon

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^2+d^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \frac{d}{\sqrt{d^2+v^2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Für das Katenoid mit der Parametrisierung

$$x = \begin{bmatrix} d\cosh(v)\cos(u) \\ d\cosh(v)\sin(u) \\ dv \end{bmatrix}$$

erhalten wir

$$x_u = \begin{bmatrix} -d\cosh(v)\sin(u) \\ d\cosh(v)\cos(u) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_v = \begin{bmatrix} d\sinh(v)\cos(u) \\ d\sinh(v)\sin(u) \\ d \end{bmatrix}$$

und damit die folgenden Koeffizienten der ersten Fundamentalform:

$$
\begin{aligned}
E &= \langle x_u, x_u \rangle = d^2 \cosh^2(v), \\
F &= \langle x_u, x_v \rangle = 0, \\
G &= \langle x_v, x_v \rangle = d^2 \sinh^2(v) + d^2 = d^2 \cosh^2(v).
\end{aligned}
$$

(c) Durch die angegebene Transformation erhalten wir die Parametrisierung

$$
y = \begin{bmatrix} d \sinh(v) \cos(u) \\ d \sinh(v) \sin(u) \\ du \end{bmatrix}
$$

des Helikoids (die mit $V := d \sinh(v)$ in die in (3.2)(b) angegebene Parametrisierung übergeht). Wir erhalten

$$
y_u = \begin{bmatrix} -d \sinh(v) \sin(u) \\ d \sinh(v) \cos(u) \\ d \end{bmatrix}, \quad y_v = \begin{bmatrix} d \cosh(v) \cos(u) \\ d \cosh(v) \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

und damit die folgenden Koeffizienten der ersten Fundamentalform:

$$
\begin{aligned}
E &= \langle y_u, y_u \rangle = d^2 \sinh^2(v) + d^2 = d^2 \cosh^2(v), \\
F &= \langle y_u, y_v \rangle = 0, \\
G &= \langle y_v, y_v \rangle = d^2 \cosh^2(v).
\end{aligned}
$$

Diese stimmt mit der in (a) erhaltenen Form überein; die angegebene Abbildung ist daher eine Isometrie.

Deutung: Kurvenlängen, Schnittwinkel und Flächeninhalte lassen sich allesamt mit Hilfe der ersten Fundamentalform ausdrücken. Da diese bei Helikoid und Katenoid übereinstimmen, sind diese beiden Flächen nicht aufgrund ihrer inneren Geometrie unterscheidbar (jedenfalls nicht lokal).