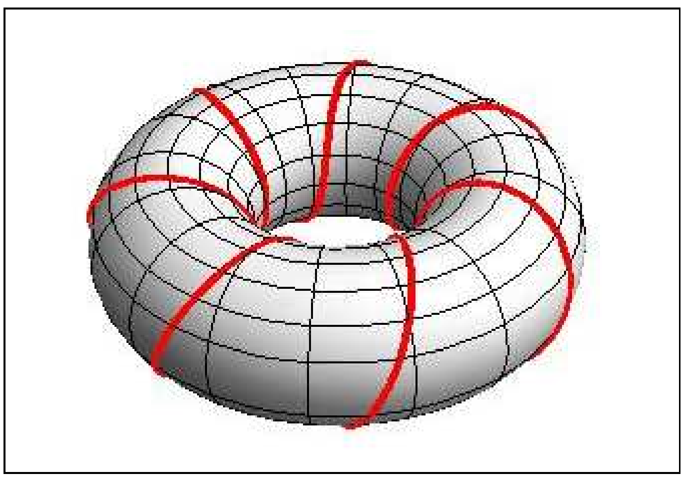
2. Lösung zur Differentialgeometrie: Räumliche Kurven

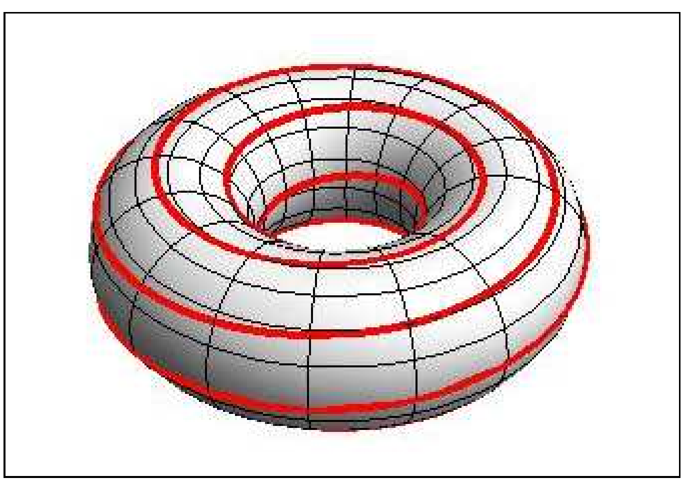
Lösung (2.1) Für beliebige Werte von u und v erhalten wir Kurven, die auf der Torusoberfläche mit der Parametrisierung

$$(U,V) \mapsto \begin{bmatrix} \cos(U)\big(R + r\cos(V)\big) \\ \sin(U)\big(R + r\cos(V)\big) \\ r\sin(V) \end{bmatrix}$$

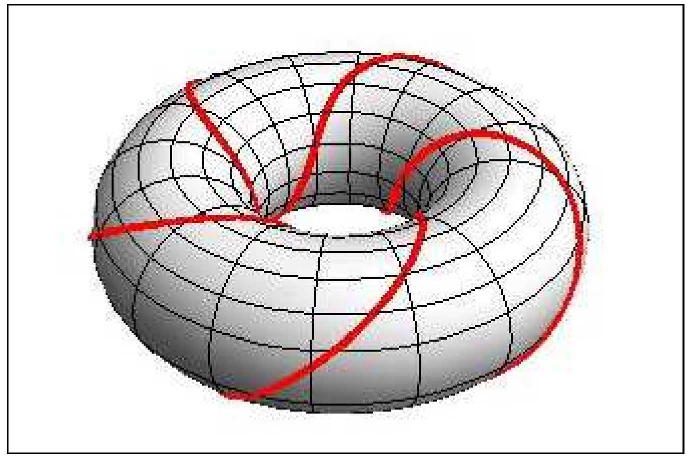
verlaufen; dabei ist u die Winkelgeschwindigkeit der Bewegung entlang der Zentrallinie des Torus, während v die Winkelgeschwindigkeit der Bewegung um die Zentrallinie herum ist. Die Kurve α ist genau dann geschlossen, wenn es eine Zahl T gibt mit $\alpha(t+T) = \alpha(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, was genau dann der Fall ist, wenn uT und vT ganzzahlige Vielfache von 2π sind, sagen wir $uT = k \cdot 2\pi$ und $vT = \ell \cdot 2\pi$ bzw. $u/k = 2\pi/T = v/\ell$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Ein solches T gibt es genau dann, wenn $u/v = k/\ell$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gilt, wenn also das Verhältnis $u : v$ rational ist. (Man kann zeigen, daß für ein irrationales Verhältnis $u : v$ die Kurve α auf der Torusoberfläche dicht liegt, also jedem Punkt der Torusoberfläche beliebig nahe kommt.)



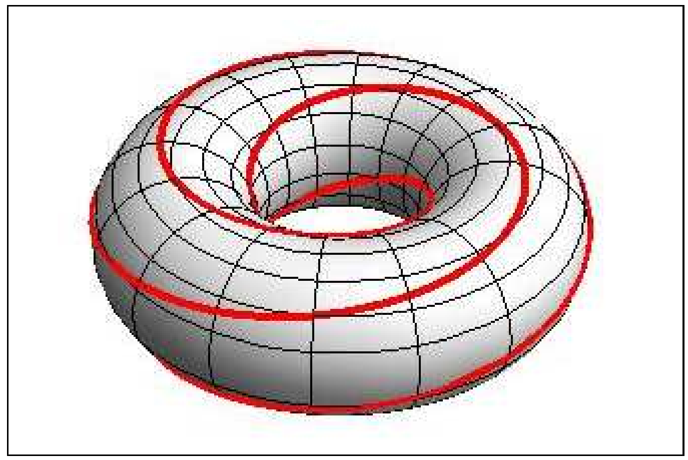
Toruskurve mit $u = 1$ und $v = 7$.



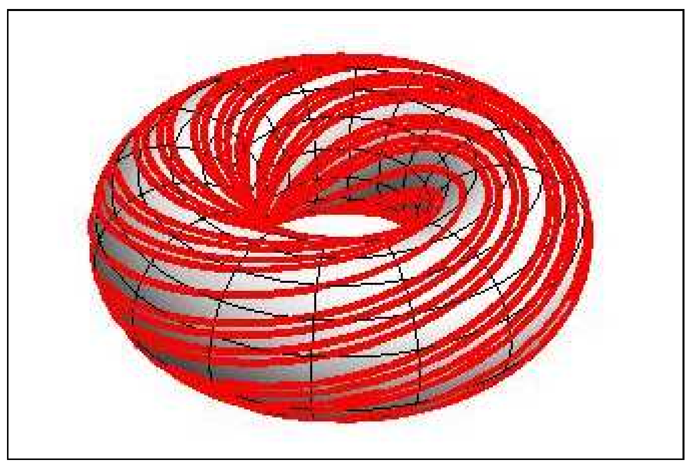
Toruskurve mit $u = 7$ und $v = 1$.



Toruskurve mit $u = 2$ und $v = 5$.



Toruskurve mit $u = 5$ und $v = 2$.



Toruskurve mit $u = 2$ und $v = \sqrt{2}$.

Lösung (2.2) (a) Für die Schraubenlinie $\alpha(t) = (r\cos t,\, r\sin t,\, dt)$ mit $d := h/(2\pi)$ erhalten wir

$$\dot\alpha(t) = \begin{bmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ d \end{bmatrix}, \qquad \ddot\alpha(t) = \begin{bmatrix} -r\cos t \\ -r\sin t \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\dddot\alpha(t) = \begin{bmatrix} r\sin t \\ -r\cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t) = \begin{bmatrix} dr\sin t \\ -dr\cos t \\ r^2 \end{bmatrix}.$$

Für die Krümmung κ und die Torsion τ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\dot\alpha(t)\times\ddot\alpha(t)\|}{\|\dot\alpha(t)\|^3} = \frac{(d^2r^2+r^4)^{1/2}}{(r^2+d^2)^{3/2}} = \frac{r}{r^2+d^2},\\ \tau(t) &= \frac{\det\big(\dot\alpha(t),\ddot\alpha(t),\dddot\alpha(t)\big)}{\|\dot\alpha(t)\times\ddot\alpha(t)\|^2} = \frac{dr^2}{d^2r^4+r^4} = \frac{d}{r^2+d^2}.\end{aligned}$$

Für das Serret-Frenet-Dreibein (T,N,B) erhalten wir dann

$$T(t)=\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}}\begin{bmatrix}-r\sin t\\ r\cos t\\ d\end{bmatrix},\quad B(t)=\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}}\begin{bmatrix}d\sin t\\ -d\cos t\\ r\end{bmatrix}$$

$$\text{sowie}\quad N(t)=B(t)\times T(t)=\begin{bmatrix}-\cos t\\ -\sin t\\ 0\end{bmatrix}.$$

(b) Für die Kurve $\alpha(t)=(t,t^2,t^3)$ erhalten wir

$$\dot\alpha(t)=\begin{bmatrix}1\\ 2t\\ 3t^2\end{bmatrix},\quad \ddot\alpha(t)=\begin{bmatrix}0\\ 2\\ 6t\end{bmatrix},\quad \dddot\alpha(t)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 6\end{bmatrix}$$

sowie

$$\dot\alpha(t)\times\ddot\alpha(t) = 2\begin{bmatrix}1\\ 2t\\ 3t^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 3t\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}3t^2\\ -3t\\ 1\end{bmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\dot\alpha(t)\times\ddot\alpha(t)\|}{\|\dot\alpha(t)\|^3} = \frac{2(1+9t^2+9t^4)^{1/2}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}},\\ \tau(t) &= \frac{\det\big(\dot\alpha(t),\ddot\alpha(t),\dddot\alpha(t)\big)}{\|\dot\alpha(t)\times\ddot\alpha(t)\|^2} = \frac{3}{1+9t^2+9t^4}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}T(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\begin{bmatrix}1\\ 2t\\ 3t^2\end{bmatrix},\\ B(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}\begin{bmatrix}3t^2\\ -3t\\ 1\end{bmatrix},\\ N(t) &= \frac{1}{\sqrt{(1+4t^2+9t^4)(1+9t^2+9t^4)}}\begin{bmatrix}-9t^3-2t\\ -9t^4+1\\ 6t^3+3t\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Lösung (2.3) Ist α eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und ist $g(t) := \big(T(t)\mid N(t)\mid B(t)\big)$ die Matrix, deren Spalten das Serret-Frenet-Dreibein von α bilden, so gilt

$$\dot g(t)=g(t)A(t)\quad\text{mit}\quad A(t):=\begin{bmatrix}0&-\kappa(t)&0\\ \kappa(t)&0&-\tau(t)\\ 0&\tau(t)&0\end{bmatrix},$$

wenn κ und τ die Krümmung und die Torsion von α bezeichnen. Diese Beobachtung liefert uns die Idee, wie wir die Kurve α zurückgewinnen können, wenn nur κ und τ gegeben sind. Es sei $t_0\in I$ beliebig gewählt. Ist $t\mapsto\Phi(t)$ die eindeutig bestimmte Lösung des matrixwertigen Anfangswertproblems

$$\dot\Phi(t) = \Phi(t)A(t),\quad \Phi(t_0)=\mathbf{1},$$

so ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot g(t)=g(t)A(t)$ gegeben durch $g(t)=g_0\Phi(t)$. Ist $t\mapsto g(t)$ irgendeine solche Lösung mit $g_0\in\mathrm{SO}(3)$, so definieren wir $T(t)$ als die erste Spalte von $g(t)$ und dann $\alpha(t) := \int_{t_0}^t T(\tau)\mathrm{d}\tau+\alpha_0$; dann ist α eine Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ. Damit ist der Existenzbeweis geführt. Sind α_1 und α_2 zwei Kurven mit der Krümmung κ und der Torsion τ, so gelten für alle $t\in I$ die Gleichungen $g_1(t)=g_1(t_0)\Phi(t)$ und $g_2(t)=g_2(t_0)\Phi(t)$, daher $g_2(t)g_1(t)^{-1}=g_2(t_0)g_1(t_0)^{-1}=: D$ und folglich $g_2(t)=Dg_1(t)$ mit einer festen Drehmatrix D. Es gilt dann $T_2(t)=D\,T_1(t)$ und damit auch

$$\begin{aligned}\alpha_2(t) &= \int_{t_0}^t T_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\alpha_2(t_0)=\int_{t_0}^t DT_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\alpha_2(t_0)\\ &= D\left(\int_{t_0}^t T_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)+\alpha_2(t_0)=D\,(\alpha_1(t)-\alpha_1(t_0))+\alpha_2(t_0)\\ &= D\,\alpha_1(t)+v\quad\text{mit}\quad v:=\alpha_2(t_0)-D\,\alpha_1(t_0).\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß sich zwei Kurven mit gleicher Krümmung und Torsion nur um eine starre Bewegung unterscheiden. Die Umkehrung der letzten Aussage ist trivial: Ist α eine Kurve und definieren wir eine neue Kurve β durch $\beta(t):=D\alpha(t)+v$ mit einer festen Drehmatrix D und einem festen Vektor v, so haben β und α gleiche Krümmung und gleiche Torsion. Wir haben nämlich $\beta^{(k)}(t)=D\alpha^{(k)}(t)$ für alle $k\geq 1$ und damit sowohl

$$\kappa_\beta = \|\ddot\beta\| = \|D\ddot\alpha\| = \|\ddot\alpha\| = \kappa_\alpha$$

als auch

$$\begin{aligned}\tau_\beta &= \frac{\det(\dot\beta,\ddot\beta,\dddot\beta)}{\|\dot\beta\times\ddot\beta\|^2} = \frac{\det(D\dot\alpha,D\ddot\alpha,D\dddot\alpha)}{\|D\dot\alpha\times D\ddot\alpha\|^2}\\ &= \frac{\det(D)\cdot\det(\dot\alpha,\ddot\alpha,\dddot\alpha)}{\|D(\dot\alpha\times\ddot\alpha)\|^2} = \frac{\det(\dot\alpha,\ddot\alpha,\dddot\alpha)}{\|\dot\alpha\times\ddot\alpha\|^2} = \tau_\alpha.\end{aligned}$$

Lösung (2.4) Wegen $\|\alpha'(s)\|\equiv 1$ gilt $T(s)=\alpha'(s)$. Durch Ableiten der Identität $\|\alpha'(s)\|^2\equiv 1$ ergibt sich $\langle\alpha'(s),\alpha''(s)\rangle\equiv 0$ und damit $\alpha(s)''\perp\alpha'(s)$ für alle s; daher gilt $N(s)=\alpha''(s)/\|\alpha''(s)\|=\alpha''(s)/\kappa(s)$ und damit $\alpha''=\kappa N$. Hieraus folgt unter Benutzungen der Frenetschen Formeln zunächst

$$\begin{aligned}\alpha''' &= (\kappa N)' = \kappa'N+\kappa N'\\ &= \kappa'N+\kappa(-\kappa T+\tau B)\\ &= -\kappa^2T+\kappa'N+\kappa\tau B\end{aligned}$$

und dann

$$\alpha'''' = -2\kappa\kappa' T - \kappa^2 T' + \kappa'' N + \kappa' N' + (\kappa\tau)' B + \kappa\tau B'$$
$$= -2\kappa\kappa' T - \kappa^3 N + \kappa'' N + \kappa'(-\kappa T + \tau B) + (\kappa\tau)' B - \kappa\tau^2 N$$
$$= -3\kappa\kappa' T + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2) N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\alpha' &= T, \\
\alpha'' &= \kappa N, \\
\alpha''' &= -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B, \\
\alpha'''' &= -3\kappa\kappa' T + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2) N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B.
\end{aligned}$$

Lösung (2.5) Für einen festen Vektor $m \in \mathbb{R}^3$ und eine feste Zahl $R > 0$ sind die Ableitungen der Funktion $a(s) := \|\alpha(s) - m\|^2 - R^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
a' &= 2\langle \alpha - m, \alpha' \rangle, \\
a'' &= 2\big(\langle \alpha', \alpha' \rangle + \langle \alpha - m, \alpha'' \rangle\big) = 2\big(1 + \langle \alpha - m, \alpha'' \rangle\big), \\
a''' &= 2\big(\langle \alpha', \alpha'' \rangle + \langle \alpha - m, \alpha''' \rangle\big) = 2\langle \alpha - m, \alpha''' \rangle.
\end{aligned}$$

Schreiben wir $v(s) := \alpha(s) - m$, so nehmen die Gleichungen $a' = a'' = a''' = 0$ für $s = s_0$ die Form

$$\langle v, \alpha' \rangle = 0, \qquad \langle v, \alpha'' \rangle = -1, \qquad \langle v, \alpha''' \rangle = 0$$

an. Dies sind drei skalare Gleichungen für die drei gesuchten Koordinaten des Vektors $m \in \mathbb{R}^3$, was generisch eine eindeutige Lösung haben sollte. Schreiben wir

$$v(s_0) = v_1 T(s_0) + v_2 N(s_0) + v_3 B(s_0)$$

und benutzen wir die Formeln $\alpha' = T$, $\alpha'' = \kappa N$ und $\alpha''' = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B$ aus der vorigen Aufgabe, so ergeben sich nacheinander die Gleichungen $v_1 = 0$, $\kappa v_2 = -1$ bzw. $v_2 = -1/\kappa$ sowie

$$\begin{aligned}
0 &= \langle v_1 T + v_2 N + v_3 B,\ -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B \rangle \\
&= -\kappa^2 v_1 + \kappa' v_2 + \kappa\tau v_3 = -(\kappa'/\kappa) + \kappa\tau v_3
\end{aligned}$$

bzw. $v_3 = \kappa'/(\kappa^2\tau)$. Damit ergibt sich

$$m = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} N(s_0) - \frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)^2 \tau(s_0)} B(s_0)$$

als Mittelpunkt der gesuchten Schmiegkugel. Der Radius R dieser Kugel ergibt sich dann aus der Gleichung

$$R^2 = \|m - \alpha(s_0)\|^2 = \frac{1}{\kappa(s_0)^2} + \left(\frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)^2 \tau(s_0)}\right)^2.$$

Lösung (2.6) Genau dann ist α eine sphärische Kurve, wenn die Schmiegkugel für alle Kurvenpunkte die gleiche ist, wenn also $m(s)$ und $R(s)$ als Funktion von s konstant sind (d.h., nicht wirklich von s abhängen). Die Bedingung $m'(s) = 0$ lautet

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha' + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' N + \frac{1}{\kappa} N' - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' B - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} B' \\
&= T - \frac{\kappa'}{\kappa^2} N + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T + \tau B) - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' B - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}(-\tau N) \\
&= \left(\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'\right) B.
\end{aligned}$$

Die Bedingung dafür, daß der Mittelpunkt der Schmiegkugel immer der gleiche raumfeste Punkt ist, lautet also

$$\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'.$$

Die Bedingung, daß auch der Radius der Schmiegkugel konstant bleibt, liefert dann keine weitere Bedingung mehr, denn durch Ableiten der Gleichung $R^2 = \kappa^{-2} + \big(\kappa'/(\kappa^2\tau)\big)^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = 2RR' &= \frac{-2\kappa'}{\kappa^3} + \frac{2\kappa'}{\kappa^2\tau}\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' \\
&= \frac{-2\kappa'}{\kappa^2\tau}\left(\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'\right).
\end{aligned}$$

Lösung (2.7) Allgemein ist die Spiegelung an einer Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x - a, n \rangle = 0\}$ mit $\|n\| = 1$ gegeben durch

$$S(x) := x - 2\langle x - a, n \rangle n.$$

O.B.d.A. sei α nach der Bogenlänge parametrisiert, und es mögen die Bedingungen $a = \alpha(T)$ und $n = \dot\alpha(T)$ gelten. Die an E gespiegelte Kurve ist dann gegeben durch

$$\beta(T + \tau) = S\big(\alpha(T - \tau)\big) \qquad (\tau > 0)$$

bzw. (wenn wir $t = T + \tau$ setzen)

$$\beta(t) = S\big(\alpha(2T - t)\big) \qquad (t > T),$$

d.h.,

$$\beta(t) = \alpha(2T - t) - 2\langle \alpha(2T - t) - \alpha(T), \dot\alpha(T) \rangle\, \dot\alpha(T).$$

Schreiben wir $\sigma(x) = x - 2\langle x, n \rangle n$ für die Spiegelung an der durch den Nullpunkt verschobenen Ebene, so erhalten wir $\dot\beta(t) = \sigma\big(-\dot\alpha(2T - t)\big) = -\sigma\big(\dot\alpha(2T - t)\big)$ und allgemein

$$\beta^{(k)}(t) = (-1)^k \sigma\big(\alpha^{(k)}(2T - t)\big) \qquad (k \geq 1).$$

Wegen $\|\dot\beta(t)\| = \|\sigma\big(\dot\alpha(2T - t)\big)\| = \|\dot\alpha(2T - t)\| = 1$ ist β wieder nach der Bogenlänge parametrisiert, und es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\beta(T) = S\big(\alpha(T)\big) = \alpha(T), \quad \dot\beta(T) = \sigma\big(-\dot\alpha(T)\big) = \dot\alpha(T), \\
&\ddot\beta(T) = \sigma\big(\ddot\alpha(T)\big)) = \ddot\alpha(T) - 2\langle \ddot\alpha(T), \dot\alpha(T) \rangle\, \dot\alpha(T) = \ddot\alpha(T),
\end{aligned}$$

wobei wir $\langle \dot\alpha, \ddot\alpha \rangle \equiv 0$ aufgrund der Bedingung $\|\dot\alpha\|^2 \equiv 1$ ausnutzten. An der "Nahtstelle", an der die Originalkurve und die gespiegelte Kurve aufeinandertreffen, stimmen also beide Kurven im der nullten, ersten und zweiten Ableitung überein; die zusammengesetzte Kurve ist damit von der Klasse C^2. Die Regularität überträgt sich natürlich von der Originalkurve auf die zusammengesetzte Kurve.

Lösung (2.8) (a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\langle\dot\alpha(t_1),\dot\alpha(t_2)\rangle \;&=\; \left\langle \begin{bmatrix} -r\sin t_1 \\ r\cos t_1 \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -r\sin t_2 \\ r\cos t_2 \\ d \end{bmatrix} \right\rangle \\
&=\; r^2\sin(t_1)\sin(t_2) + r^2\cos(t_1)\cos(t_2) + d^2 \\
&=\; r^2\cos(t_2-t_1) + d^2.
\end{aligned}
$$

Die Bedingung, daß $\dot\alpha(t_1)$ und $\dot\alpha(t_2)$ aufeinander senkrecht stehen, lautet also $\cos(t_2-t_1) = -d^2/r^2$, und diese Gleichung ist wegen $d^2/r^2 < 1$ erfüllbar.

(b) Nach der vorigen Aufgabe ist die durch Spiegelung entstehende geschlossene Kurve eine reguläre C^2-Kurve; deren Krümmung ist konstant, weil nach Aufgabe (2.2)(a) die Krümmung der Schraubenlinie konstant ist.