Lösungen zur 1. Übung zur Differentialgeometrie

Lösung (1.1) Wir bezeichnen jeweils mit M die Menge $\alpha(\mathbb{R}) = \{\alpha(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Die Parametrisierung $t \mapsto (t^3, t^6)$ ist injektiv (weil schon die erste Komponente injektiv ist), aber an der Stelle $t = 0$ nicht regulär. Offensichtlich ist $\alpha(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ gerade die Normalparabel.

(b) Für $\alpha(t) := (2t^3 + t^2,\, t^3 - t)$ gilt

$$\dot\alpha(t) = \begin{bmatrix} 6t^2 + 2t \\ 3t^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t(3t+1) \\ 3t^2 - 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

die Parametrisierung ist also überall regulär. Wir wollen zeigen, daß α injektiv ist (daß also die durch α gegebene Kurve keine mehrfachen Punkte hat). Wir nehmen widerspruchshalber an, es gelte $\alpha(s) = \alpha(t)$ mit $s \neq t$. Dann haben wir $0 = (t^3 - t) - (s^3 - s) = (t^3 - s^3) - (t - s) = (t - s)(t^2 + st + s^2 - 1)$ und $0 = (2t^3 + t^2) - (2s^3 + s^2) = 2(t^3 - s^3) + (t^2 - s^2) = (t - s)\big(2(t^2+st+s^2) + t + s\big)$, also $t^2+st+s^2 = 1$ und $0 = 2\cdot 1+t+s$, also $t = -2-s$. Einsetzen der letzten Gleichung in die Gleichung $t^2 + st + s^2 - 1 = 0$ liefert $0 = 4 + 4s + s^2 - 2s - s^2 + s^2 - 1 = s^2 + 2s + 3 = (s + 1)^2 + 2$, was nicht erfüllbar ist. Also ist α tatsächlich injektiv.

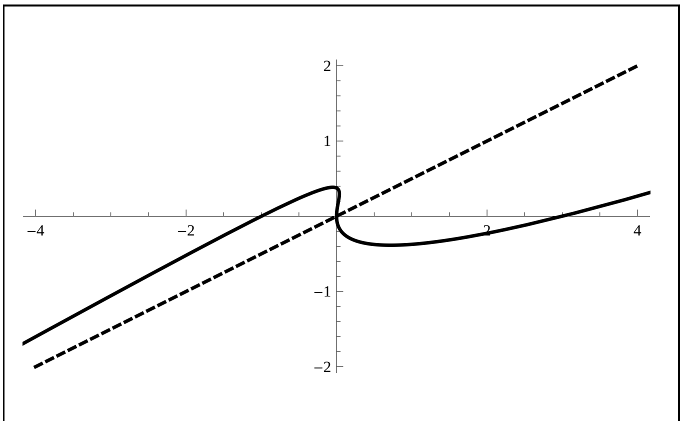


Abb. 1.1b: Kurve $t \mapsto (2t^3 + t^2,\, t^3 - t)$; gestrichelt die Gerade $y = x/2$, an die sich die Kurve für $t \to \pm\infty$ asymptotisch annähert.

Wir wollen M in Gleichungsform darstellen. Wir können dies mit roher Gewalt tun, indem wir aus den Gleichungen $x = 2t^3 + t^2$ und $y = t^3 - t$ zunächst t^3 vermöge $x - t^2 = 2t^3 = 2(y + t) = 2y + 2t$ elminieren, also $t^2 + 2t + 2y - x = 0$ schreiben, diese Gleichung gemäß $t = -1 \pm \sqrt{1 + x - 2y}$ lösen und dann das Ergebnis in eine der Gleichungen $x = 2t^3 + t^2$ und $y = t^3 - t$ einsetzen. Eleganter können wir folgendermaßen vorgehen: Die Gültigkeit der Gleichungen $y = t^3 - t$ und $x = 2t^3 + t^2$ bzw. $y + t - t^3 = 0$ und $x - t^2 - 2t^3 = 0$ ist äquivalent zum Erfülltsein des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} y & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 & 0 & -1 \\ x & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \\ t^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit der Koeffizientendeterminante

$$D(x, y) := -3x-2x^2+x^3+2xy-6x^2y+3y^2+12xy^2-8y^3 .$$

Damit ist M enthalten in der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid D(x, y) = 0\}$. Wir wollen nachprüfen, ob M sogar gleich dieser Menge ist; wir wollen also *alle* Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $D(x, y) = 0$ finden. Da die Abbildung $t \mapsto t^3 - t$ surjektiv ist, können wir immer $y = t^3 - t$ annehmen; wir wissen dann, daß $D(x, t^3 - t)$ durch $x - 2t^3 - t^2$ teilbar sein muß. Ausführung der Division $D(x, t^3 - t) : (x - 2t^3 - t^2)$ liefert
$(\star)$

$$D(x, t^3-t) = (x-2t^3-t^2)\left[\big(x + p(t)\big)^2 + \frac{(3t^2-4)(t-2)^2}{4}\right]$$

mit $p(t) := -2t^3 + (t^2/2) + 3t - 1$. Setzen wir also $x_1(t) := 2t^3 + t^2$ und $x_{2,3}(t) := -p(t) \pm (t - 2)\sqrt{4 - 3t^2}/2$, so erhalten wir die Darstellung

$$D(x, t^3 - t) = \big(x - x_1(t)\big)\big(x - x_2(t)\big)\big(x - x_3(t)\big),$$

wobei die Funktionen $x_{2,3}$ wegen des Wurzelausdrucks nur für $|t| \leq 2/\sqrt{3}$ definiert sind. Die Nullstellenmenge von D zerfällt also in die drei Kurven $t \mapsto \big(x_i(t), y(t)\big)$ mit $y(t) := t^3 - t$ und $i = 1, 2, 3$. Man kann nun aber nachprüfen, daß die letzten beiden Kurven jeweils nur einen Teil der ersten Kurve parametrisieren, also keine neuen Punkte liefern. (Man sieht dies leicht, wenn man die drei Kurven plotten läßt; das Nachrechnen ist mühsamer.) Dies legt den Schluß nahe, M stimme mit der Nullstellenmenge von D überein. Dieser Schluß ist aber falsch, denn der Punkt $(9, 6)$ ist eine Nullstelle von D, der von der Parametrisierung $t \mapsto (2t^3+t^2,\, t^3-t)$ nicht getroffen wird. Wie ging dieser Punkt "verloren"? Auf sehr subtile Weise! Die beiden Funktionen x_2 und x_3 sind nämlich (recht verstanden) auch an der Stelle $t = 2$ definiert, und für $t = 2$ geht $(\star)$ über in $D(x, 6) = (x-20)(x-9)^2$. Diese Gleichung wird von $x = 9$ und $x = 20$ gelöst. Der Punkt $(20, 6)$ kommt aber nicht neu hinzu, sondern liegt bereits in M; er wird für $t = 2$ von der Parametrisierung $t \mapsto (2t^3 + t^2,\, t^3 - t)$ erfaßt. Es gilt also

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid D(x, y) = 0\} = M \cup \{(9, 6)\}$$

(und natürlich ist $(9, 6)$ ein singulärer Punkt der Gleichung $D(x, y) = 0$). Das beobachtete Phänomen ist nicht verständlich, wenn man nur die Situation im Reellen betrachtet. Die beiden Zweige $t \mapsto \big(x_{2,3}(t), y(t)\big)$ verschwinden an den Stellen $|t| = 2/\sqrt{3}$ ins Komplexe (leben also in $\mathbb{C}^2$, nicht in $\mathbb{R}^2$), und diese komplexen Zweige der Kurve berühren den reellen Teil $\mathbb{R}^2$ noch einmal im Punkt $(9, 6)$, der daher im Reellen als isolierter Punkt der Nullstellenmenge von D zum Vorschein kommt.

(c) Die Abbildung α ist injektiv (da schon die erste Komponente injektiv ist), aber nicht regulär (da an der Stelle $t = 0$ die Ableitung gar nicht existiert). Offensichtlich ist $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$ gerade der Graph der Betragsfunktion.

(d) Für $\alpha(t) := (t^3 + t^2, t^3 - t + 1)$ erhalten wir

$$\dot{\alpha}(t) \;=\; \begin{bmatrix} 3t^2 + 2t \\ 3t^2 - 1 \end{bmatrix} \;\neq\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

die Parametrisierung ist also überall regulär. Um zu überprüfen, ob α injektiv ist, fragen wir, ob es $s \neq t$ in $\mathbb{R}$ gibt mit $\alpha(s) = \alpha(t)$. Dies führt auf $0 = t^3 + t^2 - s^3 - s^2 = (t - s)(t^2 + st + s^2 + s + t)$ und $0 = (t^3 - t + 1) - (s^3 - s + 1) = (t - s)(t^2 + st + s^2 - 1)$, also wegen $s \neq t$ auf $t^2 + st + s^2 + s + t = 0$ und $t^2 + st + s^2 = 1$. Einsetzen der zweiten in die erste Gleichung liefert $1 + s + t = 0$, also $s = -t - 1$ und damit $1 = t^2 + st + s^2 = t^2 + t + 1$ bzw. $0 = t^2 + t = t(t + 1)$. Dies führt auf $t = 0$ (und damit $s = -1$) oder $t = -1$ (und damit $s = 0$). Es gilt also $\alpha(0) = \alpha(-1)$; dieser Punkt (nämlich $(0, 1)$) ist also ein Doppelpunkt der Kurve, Die Umwandlung in Gleichungsform kann wieder mit der Resultantenmethode erfolgen, die schon in Teil (b) benutzt wurde. Wir ersparen uns die eher mühsame Rechnung.

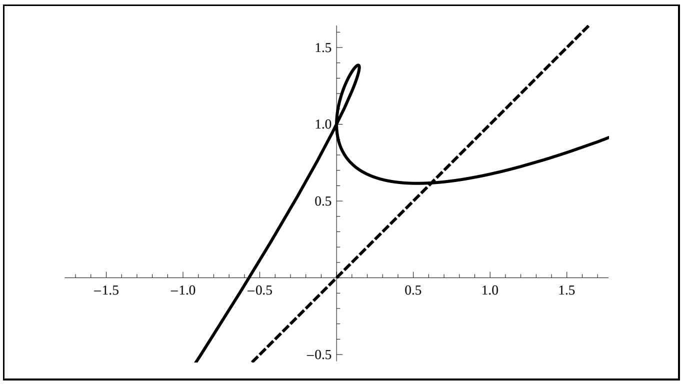


Abb. 1.1d: Kurve $t \mapsto \big(t^3 + t^2,\, t^3 - t + 1\big)$; gestrichelt die Gerade $y = x$, die als Asymptote für $t \to \pm\infty$ auftritt.

(e) Offenbar ist die angegebene Parametrisierung 2π-periodisch; läuft t von 0 bis 2π, so umrundet die Kurve $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ einmal den Nullpunkt, wobei sich der Abstand zum Nullpunkt gemäß $t \mapsto 1 + \cos t$ variiert. Wegen ihres herzförmigen Aussehens bezeichnet man die angegebene Kurve als **Herzkurve** oder **Kardioide**. Man rechnet sofort $\dot{\alpha}(\pi) = 0$ nach; die Parametrisierung ist also nicht regulär.

Für einen Punkt $(x, y) \in M$ erhalten wir $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \cos t$, also $\cos t = r - 1$ und damit $x = r\cos t = r(r - 1) = r^2 - r = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Jeder Punkt der Kardioide erfüllt also die Gleichung

$$(\star) \qquad \sqrt{x^2 + y^2} \;=\; x^2 + y^2 - x.$$

Wir behaupten, daß umgekehrt jede Lösung (x, y) dieser Gleichung ein Punkt der Kardioide ist. Für $(x, y) = (0, 0)$ ist dies klar. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gibt es eine eindeutige Polarkoordinatendarstellung $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Einsetzen in $(\star)$ liefert dann $r = r^2 - r\cos\varphi$, folglich $1 = r - \cos\varphi$ bzw. $r = 1 + \cos\varphi$ und damit

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;=\; r \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \;=\; (1 + \cos\varphi) \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Da die Gleichung $-\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 - x$ nur die Lösung $(x, y) = (0, 0)$ hat, ist $(\star)$ ist äquivalent zu der quadrierten Gleichung $x^2 + y^2 = x^4 + y^4 + x^2 + 2x^2y^2 - 2x^3 - 2xy^2$ bzw. $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^3 - 2xy^2 - y^2 = 0$.

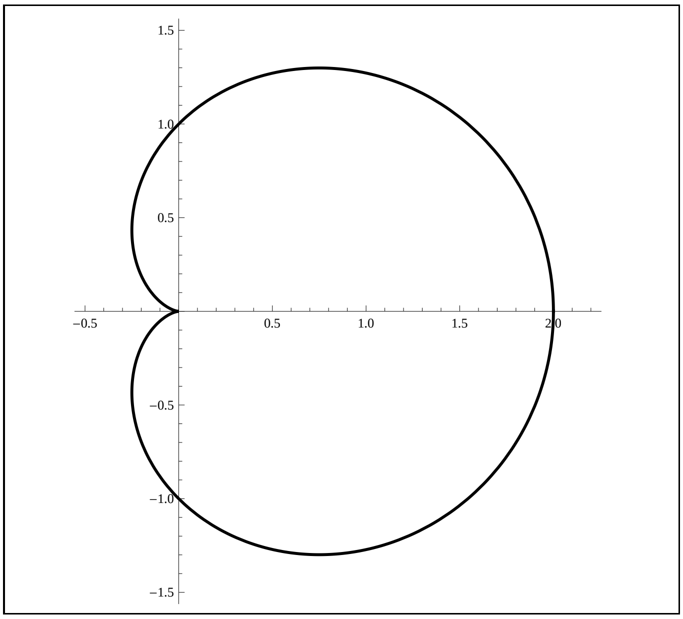


Abb. 1.1e: Herzkurve (Kardioide).

Lösung (1.2) (a) Gilt $x = 0$ für einen Punkt $(x, y) \in M$, so gilt $0 = y^3 - y^2 = y^2(y - 1)$, also $y = 0$ oder $y = 1$. Für $x \neq 0$ setzen wir $t = y/x$, also $y = tx$, und erhalten $3tx^3 + t^3x^3 - x^2 - t^2x^2 = 0$ bzw. $(3t + t^3)x = 1 + t^2$. (Hieraus folgt $0 \neq 3t + t^3 = t(3 + t^2)$, also $t \neq 0$.) Wir erhalten damit

$$M = \left\{ \left(\frac{1 + t^2}{3t + t^3}, \frac{1 + t^2}{3 + t^2} \right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \cup \{(0, 0), (0, 1)\}.$$

Der Punkt $(0, 0)$ ist ein singulärer Punkt der Kurve, denn für (x, y) genügend nahe beim Nullpunkt ist der quadratische Term $x^2 + y^2$ betragsmäßig größer als der kubische Term $3x^2y + y^3$, so daß $3x^2y + y^3 - x^2 - y^2 < 0$ gilt; der Punkt $(0, 1)$ ergibt sich als Grenzwert von $\big(x(t), y(t)\big)$ für $t \to \pm\infty$.

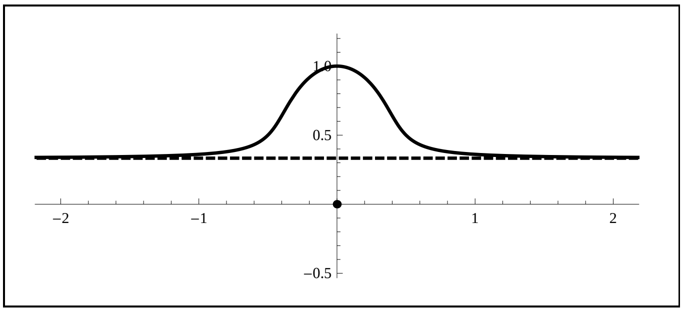


Abb. 1.2a: Lösungsmenge von $3x^2y + y^3 - x^2 - y^2 = 0$.

(b) Zum Auffinden einer Parametrisierung machen wir wieder den Ansatz $y = tx$; die Gleichung $y^2 = x^3 + x^2$ geht dann über in $t^2x^2 = x^3 + x^2$, was für $x \neq 0$ gleichbedeutend mit $t^2 = x + 1$ (und $t \neq \pm 1$) ist. Wir erhalten also die Darstellungen $x(t) = t^2 - 1$ und $y(t) = t^3 - t$, die für $t = \pm 1$ den Punkt $(0, 0)$ liefern. Es ergibt sich die Darstellung

$$M \;=\; \{(t^2 - 1, t^3 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Parametrisierung ist überall regulär, aber wegen $\alpha(-1) = \alpha(1) = (0, 0)$ nicht injektiv. Der Nullpunkt ist ein Doppelpunkt der Kurve α.

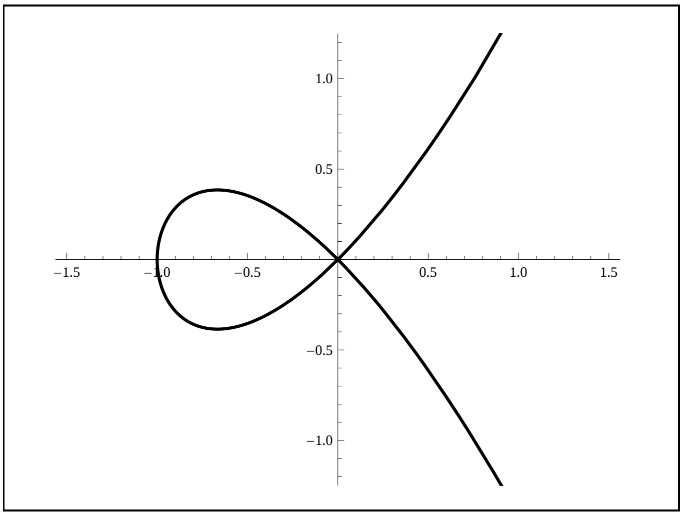


Abb. 1.2b: Darstellung der Kurve $y^2 = x^3 + x^2$.

(c) Gilt $(x, y) \in M$ mit $x = 0$, so gilt $y^2 + y^4 = 0$ und damit $(x, y) = (0, 0)$. Für $x \neq 0$ machen wir wieder den Ansatz $y = tx$ und erhalten $t^2x^2 - x^4 + t^2x^4 + t^4x^4 = 0$ und damit $t^2 = x^2(1 - t^2 - t^4)$. Dies kann nur gelten, wenn $t^4 + t^2 - 1 < 0$ gilt, also $-T < t < T$ mit $T := \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$. Wir erhalten also

$$M \;=\; \left\{ \pm \left(\frac{t}{\sqrt{1 - t^2 - t^4}}, \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2 - t^4}} \right) \mid -T < t < T \right\}.$$

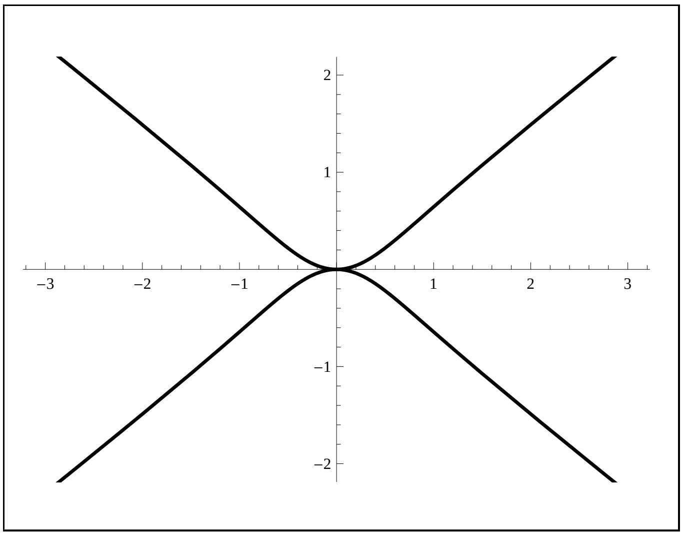


Abb. 1.2c: Lösungsmenge von $y^2 - x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0$.

(d) Die Menge M ist definiert als Nullstellenmenge der Funktion

$$\begin{aligned} g(x, y) \;&:=\; (x^2 - 1)^2 + 2y^2(x^2 + 1) + y^4 - 1 \\ &=\; x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2y^2 - 2x^2 \\ &=\; (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

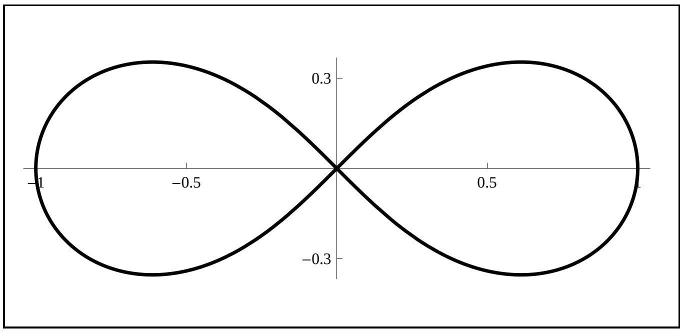


Abb. 1.2d: Lösungsmenge von $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

Eine geschicktere Parametrisierung als durch Auflösen nach x oder y erhält man durch Einführen von Polarkoordinaten. Mit $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ ergibt sich $0 = g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r^4 - r^2 \cos(2\varphi) = r^2\big(r^2 - \cos(2\varphi)\big)$. Hieraus folgt $r = 0$ oder $r^2 = \cos(2\varphi)$. Dies liefert $r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$ und damit die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \big(x(\varphi), y(\varphi)\big) \;&=\; \sqrt{\cos(2\varphi)}\big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big) \\ \text{mit} \quad \varphi &\in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

(e) Um eine Parametrisierung zu erhalten, machen wir wieder den Ansatz $y = tx$. (Wir fragen also für jeden Steigungswert t nach dem Schnitt der Menge M mit der Geraden $y = tx$.) Einsetzen in die Gleichung $g(x, y) = 0$ führt auf

$$0 \;=\; 2x^3 - 3x^2 + 2t^3x^3 + 3t^2x^2 \;=\; x^2\big(2x - 3 + 2t^3x + 3t^2\big)$$

und damit auf $x = 0$ oder $(2 + 2t^3)x = 3 - 3t^2$. Für $t \neq -1$ erhalten wir hieraus die Parametrisierung

$$\big(x(t), y(t)\big) \;=\; \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^3}, \frac{t - t^3}{1 + t^3} \right).$$

Für $t = -1$ ist die Gleichung identisch erfüllt; das bedeutet, daß jeder Punkt der Form $(x, -x)$ in M enthalten ist. Tatsächlich geht die Polynomdivision $f(x, y) : (x + y)$ ohne Rest auf; wir erhalten

$$g(x, y) \;=\; (y + x)(2y^2 - 2xy + 2x^2 + 3y - 3x).$$

Genau dann gilt also $g(x, y) = 0$, wenn $y = -x$ oder aber $2y^2 - 2xy + 2x^2 + 3y - 3x = 0$ gilt. Die letzte Gleichung beschreibt eine Ellipse, wie man durch Hauptachsentransformation sofort sieht. Die Menge M ist also die Vereinigung der Ellipse $2y^2 - 2xy + 2x^2 + 3y - 3x = 0$ und der Geraden $y = -x$. Die Punkte $(0, 0)$ und $(1, -1)$

sind gerade die Schnittpunkte dieser beiden Kurven. Es ist klar, daß keine Umgebung einer dieser beiden Punkte von M homöomorph zu einem reellen Intervall sein kann; die Menge M kann also nicht als Ganzes als Bild $\alpha(\mathbb{R})$ einer regulär parametrisierten Kurve α erhalten werden.

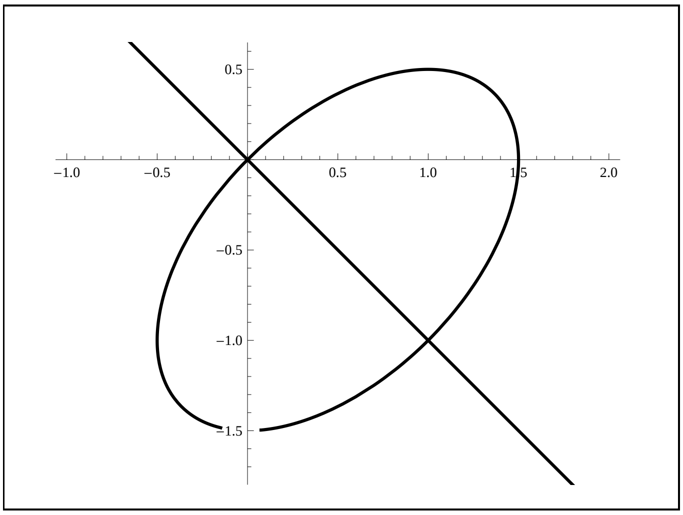


Abb. 1.2e: Lösungsmenge von $2x^3-3x^2+2y^3+3y^2=0$.

(f) Mit $g(x,y) := x^3+y^3-\sqrt{2}$ gilt $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}$.Anhand der Zeichnung vermutet man, daß sich M als Graph einer Funktion φ darstellen läßt, deren Argument eine entlang der zweiten Winkelhalbierenden gezählte Koordinate ist.

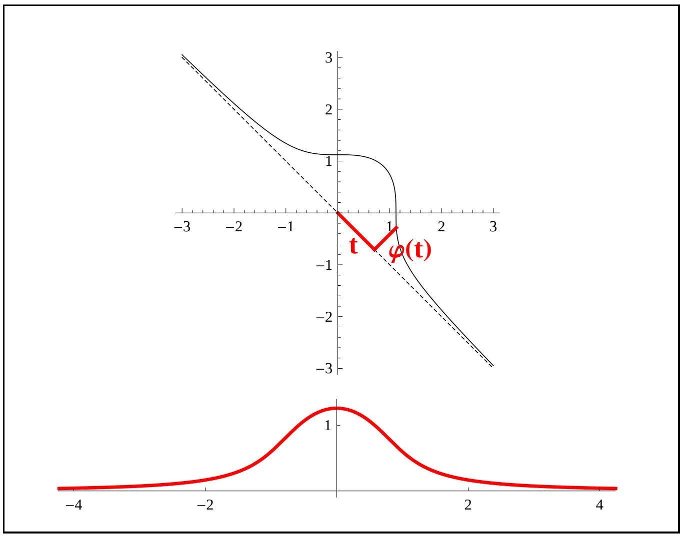


Abb. 1.2f: Lösungsmenge von $x^3+y^3=\sqrt[3]{2}$.

Dazu setzen wir

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} + \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

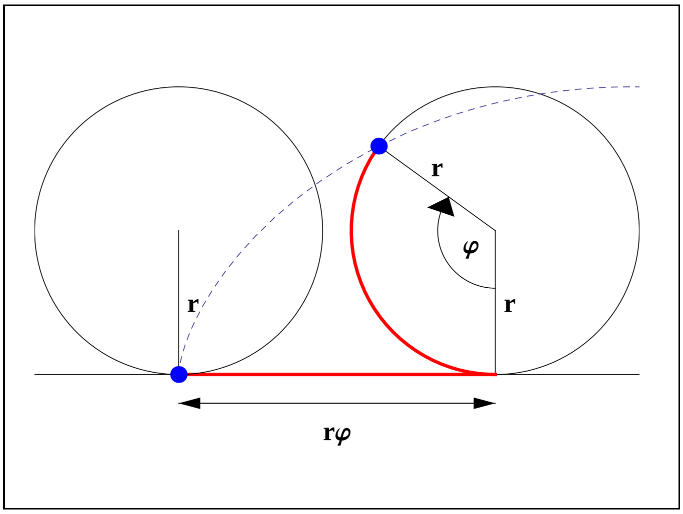
für die gesuchte Funktion φ an. Die Bedingung $\big(x(t),y(t)\big)\in M$ führt auf die Gleichung $4=\big(t+\varphi(t)\big)^3+\big(-t+\varphi(t)\big)^3=2\varphi(t)^3+6t^2\varphi(t)$ bzw. $\varphi(t)^3-3t^2\varphi(t)-2=0$. Nach der Cardanischen Formel hat diese Gleichung eine eindeutige reelle Lösung, nämlich

$$\varphi(t) = \sqrt[3]{\sqrt{t^6+1}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{t^6+1}-1}.$$

Der Graph von φ ist im unteren Teil der Abbildung dargestellt. Eine Parametrisierung von M ist dann gegeben durch $t\mapsto\big(x(t),y(t)\big)=\big((\varphi(t)+t)/\sqrt{2},(\varphi(t)-t)/\sqrt{2}\big)$.

Lösung (1.3) (a) Wenn sich das Rad um den Winkel φ gedreht hat, so hat sich der Berührpunkt um die Strecke $r\varphi$ weiterbewegt (Rollbedingung); wir erhalten also die Parameterdarstellung

$$\begin{bmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\varphi - r\sin\varphi \\ r-r\cos\varphi \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \varphi-\sin\varphi \\ 1-\cos\varphi \end{bmatrix}.$$



Herleitung der Zykloidenparametrisierung.

(b) Denken wir uns einen Zykloidenbogen in der Form $x\mapsto y(x)$ gegeben, so ist der Flächeninhalt zwischen dem Bogen und der x-Achse gegeben durch das Integral $\int_0^{2\pi r} y(x)\,\mathrm{d}x$, denn die abgerollte Strecke ist genau der Kreisumfang $2\pi r$. Fassen wir $x(\varphi)=r(\varphi-\sin\varphi)$ als Koordinatentransformation mit $\mathrm{d}x=r(1-\cos\varphi)$ auf, so ergibt sich der Flächeninhalt

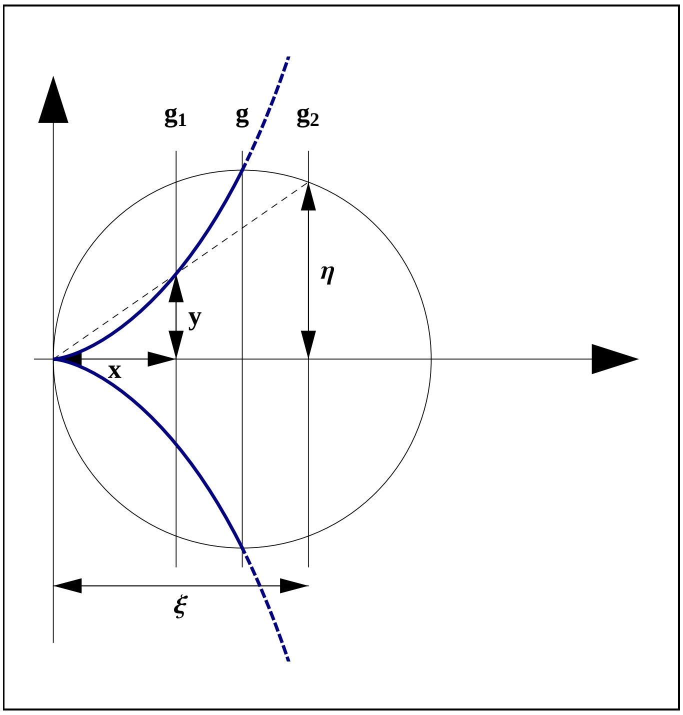
$$\begin{aligned}
F &= \int_0^{2\pi r} y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} y\big(x(\varphi)\big)\,r(1-\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} r(1-\cos\varphi)\,r(1-\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi \\
&= r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = r^2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= r^2\int_0^{2\pi}\frac{3+\cos(2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3r^2}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 3\pi r^2\,.
\end{aligned}$$

(Die Fläche unter dem Zykloidenbogen ist also genau dreimal so groß wie die Fläche des abrollenden Kreises.) Für die Länge ℓ des Zykloidenbogens ergibt sich

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{2\pi}\sqrt{x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi = r\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= r\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2(\varphi/2)}\,\mathrm{d}\varphi = 2r\int_0^{2\pi}\sin(\varphi/2)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2r\Big[-2\cos(\varphi/2)\Big]_{\varphi=0}^{2\pi} = 2r\cdot 3 = 8r.
\end{aligned}$$

(Die Länge des Zykloidenbogens ist also genau viermal so groß wie der Durchmesser des abrollenden Kreises.)

Lösung (1.4) Mit den Bezeichnungen der folgenden Skizze gelten die Beziehungen $y/x = \eta/\xi$ (Strahlensatz), $\xi - r = r - x$ (gleicher Abstand von g_1 und g_2 zu g) sowie $(\xi - r)^2 + \eta^2 = r^2$ (Kreisgleichung).



Herleitung der Gleichung der Kissoide.

Die zweite Gleichung liefert $\xi = 2r - x$, die dritte dann $\eta^2 = r^2 - (r - x)^2 = 2rx - x^2$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert dann

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{\eta^2}{\xi^2} = \frac{x(2r-x)}{(2r-x)^2} = \frac{x}{2r-x}$$

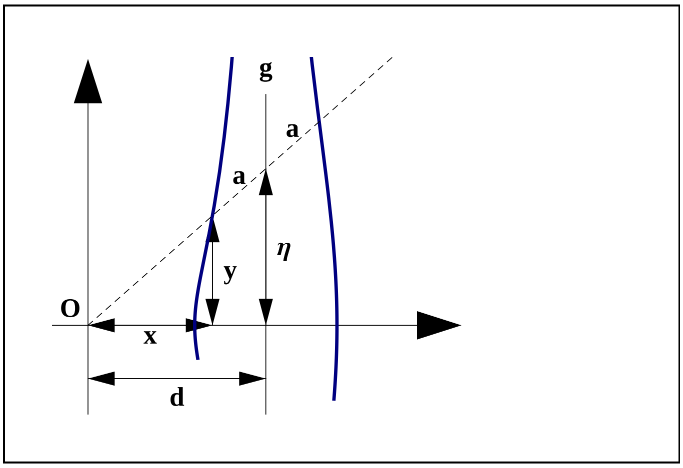
und damit

$$y^2(2r - x) = x^3 .$$

Setzen wir $y = tx$ an, so folgt $t^2x^2(2r-x) = x^3$ und damit $x = 0$ oder $2rt^2 - t^2x = x$ bzw. $x(1+t^2) = 2rt$; der Fall $x = 0$ ist in dieser Gleichung für $t = 0$ mit enthalten. Als Parameterform der Kissoide ergibt sich dann

$$x(t) = \frac{2rt}{t^2+1}, \quad y(t) = \frac{2rt^2}{t^2+1} .$$

Lösung (1.5) Mit den Bezeichnungen der folgenden Skizze gelten die Beziehungen $y/x = \eta/d$ (Strahlensatz) sowie $(d-x)^2 + (\eta - y)^2 = a^2$ (Abstandsbedingung); dabei ist egal, ob wir den Punkt (x, y) links oder rechts von g wählen.



Herleitung der Gleichung der Konchoide.

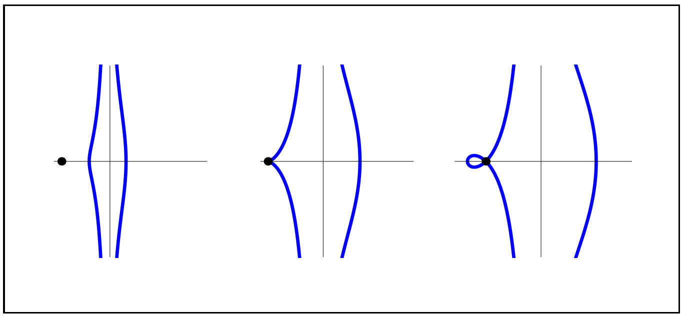
Setzen wir $\eta = dy/x$ in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich $a^2 = (d-x)^2 + (dy/x - y)^2$ bzw. $a^2x^2 = x^2(d-x)^2 + (dy - xy)^2 = (x^2+y^2)(d-x)^2$, also

$$(x^2+y^2)(d-x)^2 = a^2x^2 .$$

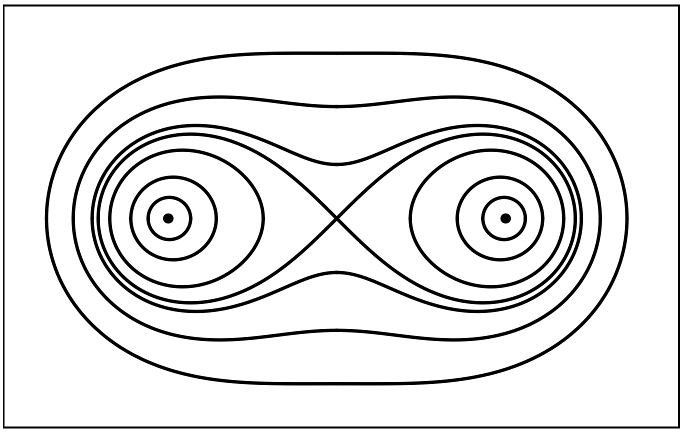
Um eine Parameterdarstellung zu erhalten, können wir diese Gleichung einfach nach y auflösen; wir können aber auch $y = tx$ ansetzen und erhalten dann $x^2(1+t^2)(d-x)^2 = a^2x^2$ und für $x \neq 0$ daher $(x-d)^2 = a^2/(1+t^2)$. Dies liefert die Parameterdarstellung

$$x(t) = d \pm \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y(t) = dt \pm \frac{at}{\sqrt{1+t^2}} .$$

Jede der beiden möglichen Vorzeichenwahlen liefert einen Zweig der Kurve. Für $a < d$ sind beide Zweige singularitätenfrei, für $a = d$ tritt eine Spitze auf, für $a > d$ ein Doppelpunkt.


Aussehen der Konchoide für $a < d$ (links), $a = d$ (Mitte) und $a > d$ (rechts).

Lösung (1.6) Wir wählen die Verbindungsgerade $\overline{P_1P_2}$ als x-Achse unseres Koordinatensystems und den Mittelpunkt der Strecke $[P_1, P_2]$ als Ursprungspunkt. Wir haben dann $P_1 = (-a, 0)$ und $P_2 = (a, 0)$; ein Punkt (x, y) liegt folglich genau dann auf der Lemniskate, wenn $\sqrt{(x+a)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2+y^2} = c^2$ mit einer Konstanten c gilt. Quadrieren und Ausmultiplizieren dieser Gleichung führt auf $(x^2 - a^2)^2 + 2y^2(x^2+a^2) + y^4 = c^4$. Das Aussehen dieser Kurven (für $a = 1$) wird durch die folgende Abbildung gezeigt.



Lösungsmengen der Gleichungen $(x^2-1)^2+2y^2(x^2+1)+y^4=c^4$ für verschiedene Werte von c.

Lösung (1.7) (a) Ableiten der Identität $f\big(x(c),c\big) = 0$ nach c liefert unter Benutzung der Kettenregel die Gleichung

$$(\star)\qquad \langle(\nabla_x f)\big(x(c)\big), x'(c)\rangle + \frac{\partial f}{\partial c}\big(x(c),c\big) \;=\; 0.$$

Andererseits ist $x'(c)$ auch ein Tangentenvektor an die Kurve K_c im Punkt $x(c)$, erfüllt also die Bedingung $\langle(\nabla_x f)\big(x(c),c\big), x'(c)\rangle = 0$. Setzen wir dies in $(\star)$ ein, so ergibt sich die angegebene Enveloppenbedingung.

(b) Die Gerade $y=0$ hat mit jeder der Parabeln $y=(x-c)^2$ genau einen Punkt gemeinsam, nämlich $(c,0)$. Ableiten der Bedingung $(x-c)^2-y=0$ nach c liefert $2(x-c)=0$, also $x=c$. Die Enveloppe ist daher $\{(c,0)\mid c\in\mathbb{R}\}$, also die x-Achse, was auch geometrisch unmittelbar einleuchtet.

(c) Integrieren der Bewegungsgleichungen $\ddot{x}=0$ und $\ddot{y}=-g$ führt auf $x(t)=v\cos(\alpha)\cdot t$ und $y(t)=-(gt^2/2)+v\sin(\alpha)t$. Die erste Gleichung liefert $t=x/(v\cos\alpha)$; Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt dann

$$(1)\qquad \begin{aligned} y &= \frac{-gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}+x\tan\alpha \\ &= \frac{-gx^2}{2v^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)+x\,\tan\alpha \end{aligned}$$

als explizite Darstellung der Kurve C_α. Durch Ableiten nach dem Parameter α erhalten wir die Enveloppenbedingung

$$0 \;=\; \frac{-gx^2\sin\alpha}{v^2\cos^3\alpha}+\frac{x}{\cos^2\alpha},$$

die nach Umformen auf

$$(2)\qquad x \;=\; \frac{v^2\cos\alpha}{g\sin\alpha}\quad\text{bzw.}\quad \tan\alpha \;=\; \frac{v^2}{gx}$$

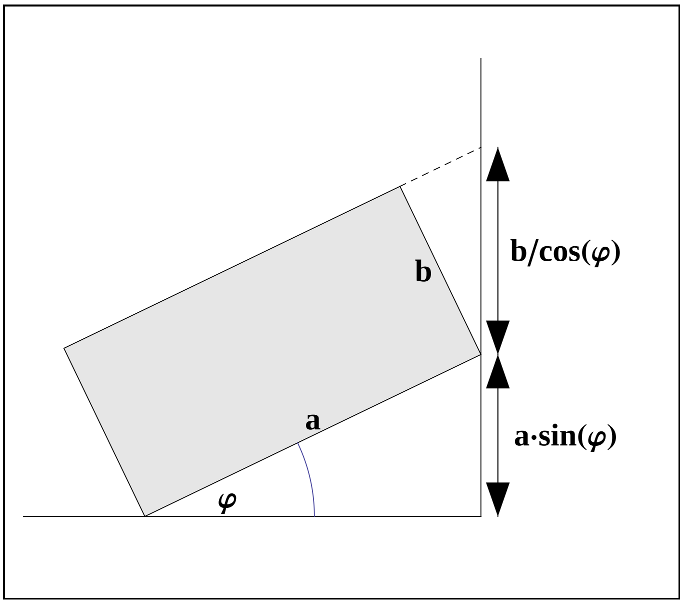
führt. Setzen wir (2) in (1) ein, so ergibt sich

$$(3)\qquad y \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{g}-\frac{gx^2}{v^2}\right).$$

Dies ist die Gleichung einer nach unten geöffneten Parabel, deren Brennpunkt der Abschußpunkt $(0,0)$ ist.

Lösung (1.8) Die Gerade $\overline{R_\varphi S_\varphi}$ hat die Steigung $\tan\varphi$ und den Achsenabschnitt $a\sin\varphi+(b/\cos\varphi)$, also die Gleichung $y=(\tan\varphi)x+(a\sin\varphi+b/\cos\varphi)$ bzw.

$$(1)\qquad y\cos\varphi \;=\; x\sin\varphi+a\sin\varphi\cos\varphi+b.$$



Die Gleichung (1) beschreibt eine Geradenschar mit dem Scharparameter $\varphi\in(0,\pi/2)$. Um die Einhüllkurve dieser Schar zu ermitteln, leiten wir nach dem Parameter φ ab und erhalten

$$(2)\qquad -y\sin\varphi \;=\; x\cos\varphi+a(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi).$$

Die Einhüllende besteht dann aus allen Punkten $(x,y)=\big(x(\varphi),y(\varphi)\big)$, die (1) und (2) erfüllen. Wir können nun entweder versuchen, die Variable φ aus den Gleichungen (1) und (2) zu eliminieren und die Einhüllende durch eine Gleichung $F(x,y)=0$ zu beschreiben, oder aber (1) und (2) nach (x,y) aufzulösen und die Einhüllende in Parameterform zu gewinnen. Tun wir letzteres, so erhalten wir

$$\begin{bmatrix}\sin\varphi & -\cos\varphi\\ \cos\varphi & \sin\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}-a\sin\varphi\cos\varphi-b\\ -a(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\end{bmatrix}$$

und damit

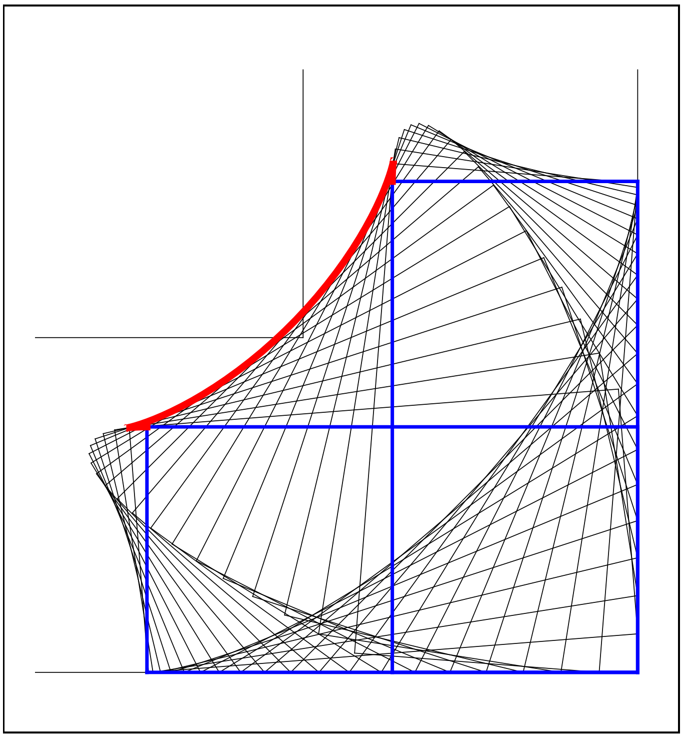
$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}\sin\varphi & \cos\varphi\\ -\cos\varphi & \sin\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-a\sin\varphi\cos\varphi-b\\ -a(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\end{bmatrix}$$

bzw. (nach Ausmultiplizieren und Vereinfachen)

$$(3)\qquad \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}-a\cos^3\varphi-b\sin\varphi\\ a\sin^3\varphi+b\cos\varphi\end{bmatrix}.$$

Zeichnen wir diese Hüllkurve, so erkennen wir, daß sie nicht unterhalb des Punktes E verläuft; das Verschieben der Truhe ist also *nicht* möglich.

$$
\begin{bmatrix}
x^2-a^2 & 2bx & b^2+3a^2 & 0 & -3a^2 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x^2-a^2 & 2bx & b^2+3a^2 & 0 & -3a^2 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & x^2-a^2 & 2bx & b^2+3a^2 & 0 & -3a^2 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & x^2-a^2 & 2bx & b^2+3a^2 & 0 & -3a^2 & 0 & a^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & x^2-a^2 & 2bx & b^2+3a^2 & 0 & -3a^2 & 0 & a^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2-a^2 & 2bx & b^2+3a^2 & 0 & -3a^2 & 0 & a^2\\
y^2-b^2 & 0 & b^2 & -2ay & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & y^2-b^2 & 0 & b^2 & -2ay & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & y^2-b^2 & 0 & b^2 & -2ay & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & y^2-b^2 & 0 & b^2 & -2ay & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & y^2-b^2 & 0 & b^2 & -2ay & 0 & 0 & a^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2-b^2 & 0 & b^2 & -2ay & 0 & 0 & a^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1\\ s\\ s^2\\ s^3\\ s^4\\ s^5\\ s^6\\ s^7\\ s^8\\ s^9\\ s^{10}\\ s^{11}\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}
$$

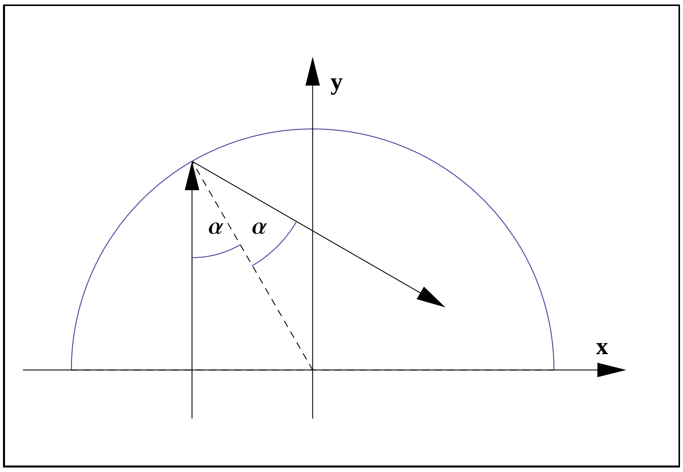


Obwohl dies für die Lösung der Aufgabe nicht nötig ist, wollen wir noch zeigen, wie man aus der Parameterdarstellung (3) eine Darstellung der Hüllkurve in Form einer Gleichung gewinnen kann. Schreiben wir $s := \sin\varphi$, so ist $\cos\varphi = \sqrt{1-s^2}$; wir erhalten dann aus (3) einerseits $x + bs = -a(\sqrt{1-s^2})^3$ und andererseits $y - as^3 = b\sqrt{1-s^2}$, nach Quadrieren also $(x+bs)^2 = a^2(1-s^2)^3$ und $(y-as^3)^2 = b^2(1-s^2)$. Multiplizieren wir diese Gleichungen aus und sortieren wir nach Potenzen von s, so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (x^2-a^2) + 2bx\,s + (b^2+3a^2)s^2 - 3a^2s^4 + a^2s^6,\\
0 &= (y^2-b^2) + b^2s^2 - 2ay\,s^3 + a^2s^6.
\end{aligned}
$$

Multiplizieren wir beide Gleichungen der Reihe nach mit 1, s, s^2, s^3, s^4 und s^5 durch, so ergibt sich ein homogenes Gleichungssystem mit der nichttrivialen Lösung $(1, s, \ldots, s^{11})^T$ (siehe oben). Das ist nur möglich, wenn die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems verschwindet. Nullsetzen der Determinante liefert eine (ziemlich furchterregende) Gleichung vom Grad 12 sowohl in x als auch in y als Gleichung der Hüllkurve.

Lösung (1.9) Wir wählen ein Koordinatensystem so, daß der Halbkreis durch die Gleichung $y = \sqrt{1-x^2}$ gegeben ist. Ferner parametrisieren wir die einfallenden Strahlen durch deren jeweiligen Winkel α mit dem Radiusvektor.



Der reflektierte Strahl, der zu dem einfallenden Strahl mit einem gegebenen Winkel α führt, hat dann den Steigungswinkel $2\alpha - (\pi/2)$ und geht durch den Punkt $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ und erfüllt folglich die Gleichung

$$
\begin{aligned}
y &= \tan\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)(x + \sin\alpha) + \cos\alpha\\
&= \frac{-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}(x+\sin\alpha) + \cos\alpha\\
&= \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\cdot x + \frac{1}{2\cos\alpha}\\
&= \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\frac{x}{2} + \frac{1}{2\cos\alpha}\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Durch Ableiten nach dem Parameter α erhalten wir die

Enveloppenbedingung

$$0 \;=\; \left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\frac{x}{2}+\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha},$$

die nach Durchmultiplizieren mit $2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ übergeht in

$$x \;=\; -\sin^3\alpha\,. \tag{2}$$

Setzen wir dies in (1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} y \;&=\; \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\frac{-\sin^3\alpha}{2}+\frac{1}{2\cos\alpha}\\ &=\; \frac{-\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1}{2\cos\alpha}\\ &=\; \frac{(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2\cos\alpha} \qquad (3)\\ &=\; \frac{\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}\\ &=\; \frac{\cos\alpha}{2}\cdot(1+2\sin^2\alpha). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) und (3) zusammen ergeben eine Parameterdarstellung der gesuchten Enveloppe. Mit $\sin\alpha = -x^{1/3}$ gemäß (2) und damit $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^{2/3}}$ geht (3) über in die explizite Gleichung

$$y \;=\; \sqrt{1-x^{2/3}}\cdot\left(\frac{1}{2}+x^{2/3}\right).$$

Lösung (1.10) (a) Es seien $T(t)$ der Einheitstangentenvektor der Kurve und $s(t)=\int_0^t\sqrt{\dot{x}(\tau)^2+\dot{y}(\tau)^2}\,\mathrm{d}\tau$ die vom Punkt $P(0)$ aus abgetragene Bogenlänge; definitionsgemäß gilt dann $Q(t)=P(t)-s(t)T(t)$. Ausgeschrieben bedeutet dies

$$Q(t) \;=\; \begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}-\frac{s(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}.$$

(b) Legen wir ein xy-Koordinatensystem so, daß der Kreismittelpunkt in den Ursprung fällt und die x-Achse in Richtung des gewählten Anfangspunkts der Kreisparametrisierung zeigt, so ist der Kreis gegeben durch die Parametrisierung

$$P(t)=R\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}\ \text{ mit } T(t)=\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}\ \text{ und } s(t)=Rt.$$

Die ergibt für die Involute des Kreises die Parametrisierung

$$t\mapsto Q(t)=R\cdot\begin{bmatrix}\cos t+t\sin t\\ \sin t-t\cos t\end{bmatrix}.$$

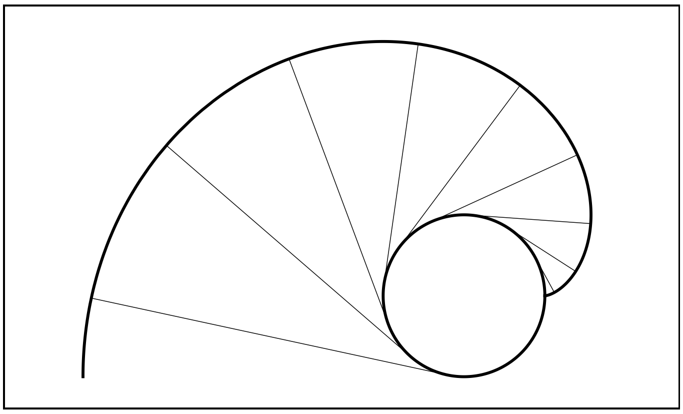


Abb. 1.10: Involute eines Kreises.

Lösung (1.11) (a) Wir bezeichnen mit $\alpha(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ einen Punkt der Kurve C, mit $r(t)$ und $\big(X(t),Y(t)\big)$ den zugehörigen Krümmungsradius bzw. Krümmungsmittelpunkt und mit $\varphi(t)$ den Steigungswinkel von C in dem gegebenen Punkt. Wir haben dann

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}$$

und daher wegen $r_{\rm or}=1/\kappa_{\rm or}=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}/(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})$ (wobei $r_{\rm or}:=\operatorname{sign}\big(\det(\dot{\alpha},\ddot{\alpha})\big)\,r=\operatorname{sign}(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})\,r$ den orientierten Radius bezeichnet) die Gleichung

$$\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+r_{\rm or}\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}\begin{bmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{bmatrix}.$$

(b) Einsetzen von $x(t)=t$ und $y(t)=t^2$ in die in (a) erhaltene Formel liefert

$$\begin{bmatrix}X(t)\\ Y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\ t^2\end{bmatrix}+\frac{1+4t^2}{2}\begin{bmatrix}-2t\\ 1\end{bmatrix}\;=\;\begin{bmatrix}-4t^3\\ 3t^2+(1/2)\end{bmatrix}$$

als Parameterdarstellung der gesuchten Evolute. Wir können diese Evolute auch durch eine Gleichung beschreiben; wir haben nämlich $X^2=16t^6=16\big((Y-1/2)/3\big)^3=2\big((2Y-1)/3\big)^3$ und damit

$$27\,X^2 \;=\; 2\,(2Y-1)^3.$$

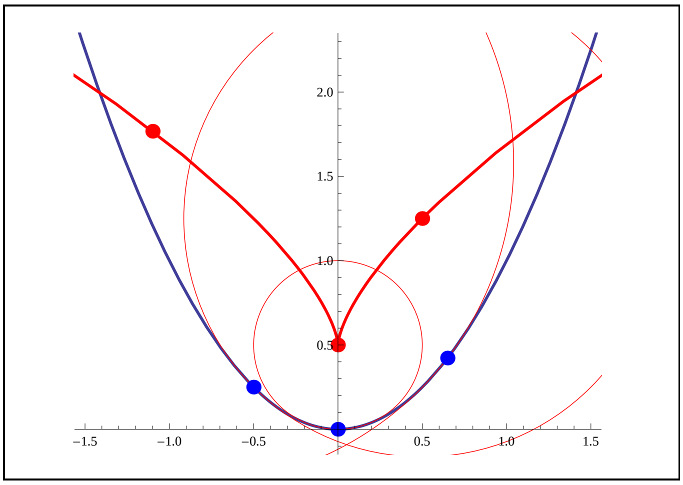


Abb. 1.11a: Evolute der Normalparabel.

(b) Mit der in der vorigen Aufgabe hergeleiteten Parameterdarstellung

$$\begin{bmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \varphi - \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{bmatrix}$$

erhalten wir

$$\begin{bmatrix} x'(\varphi) \\ y'(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x''(\varphi) \\ y''(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

und damit die orientierte Krümmung

$$\kappa_{\text{or}}(\varphi) = \frac{x'(\varphi)y''(\varphi) - x''(\varphi)y'(\varphi)}{\big(x(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2\big)^{3/2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}\,r\,\sqrt{1-\cos\varphi}}.$$

(Wir beachten, daß diese Krümmung an den Stellen $k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nicht definiert und überall sonst negativ ist, die Zykloide also stets rechtsgekümmt ist.) Für die Evolute der Zykloide ergibt sich die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X(\varphi) \\ Y(\varphi) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{bmatrix} + \frac{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}{x'(\varphi)y''(\varphi) - x''(\varphi)y'(\varphi)} \begin{bmatrix} -y'(\varphi) \\ x'(\varphi) \end{bmatrix} \\
&= r\left(\begin{bmatrix} \varphi - \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{bmatrix} + \frac{2(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi - 1} \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{bmatrix} \right) \\
&= r\left(\begin{bmatrix} \varphi - \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{bmatrix} \right) = r \begin{bmatrix} \varphi + \sin\varphi \\ -1 + \cos\varphi \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Schreiben wir $\widehat{\varphi} := \varphi - \pi$, so haben wir $\varphi = \widehat{\varphi} + \pi$, $\sin\varphi = -\sin\widehat{\varphi}$ sowie $\cos\varphi = -\cos\widehat{\varphi}$ und damit

$$\begin{bmatrix} X(\widehat{\varphi}) \\ Y(\widehat{\varphi}) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \pi \\ -2 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} \widehat{\varphi} - \sin\widehat{\varphi} \\ 1 - \cos\widehat{\varphi} \end{bmatrix}.$$

Die Evolute einer Zykloide ist also wieder eine Zykloide, die gegenüber der ursprünglichen Zykloide parallelverschoben ist.

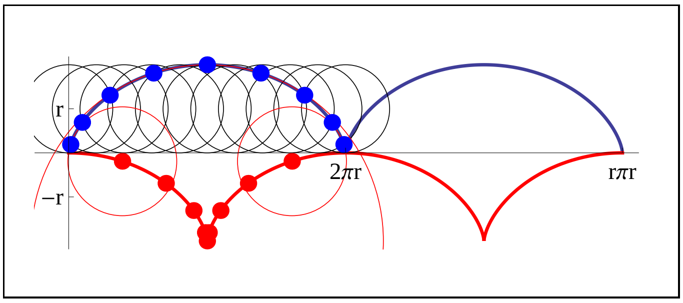


Abb. 1.11b: Evolute einer Zykloide.

Lösung (1.12) Wir denken uns die Kurve nach ihrer Bogenlänge s parametrisiert und haben dann $x'(s) = \cos\varphi(s)$ und $y'(s) = \sin\varphi(s)$, wenn φ den Steigungswinkel bezeichnet; ferner ist die orientierte Krümmung gegeben durch $\kappa_{\text{or}}(s) = \varphi'(s)$. Wir nehmen $\kappa_{\text{or}} > 0$ an (der Fall $\kappa_{\text{or}} < 0$ wird völlig analog behandelt) und haben dann $r(s) = 1/\kappa_{\text{or}}(s) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}\varphi$, wenn wir φ als Kurvenparameter auffassen. Ferner haben wir

$$r\cos\varphi = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} \quad \text{und} \quad r\sin\varphi = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt zu einem Punkt $p = \big(x(\varphi), y(\varphi)\big)$ der Kurve C ist nach der vorigen Aufgaben gegeben durch

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - r\sin\varphi \\ y + r\cos\varphi \end{bmatrix};$$

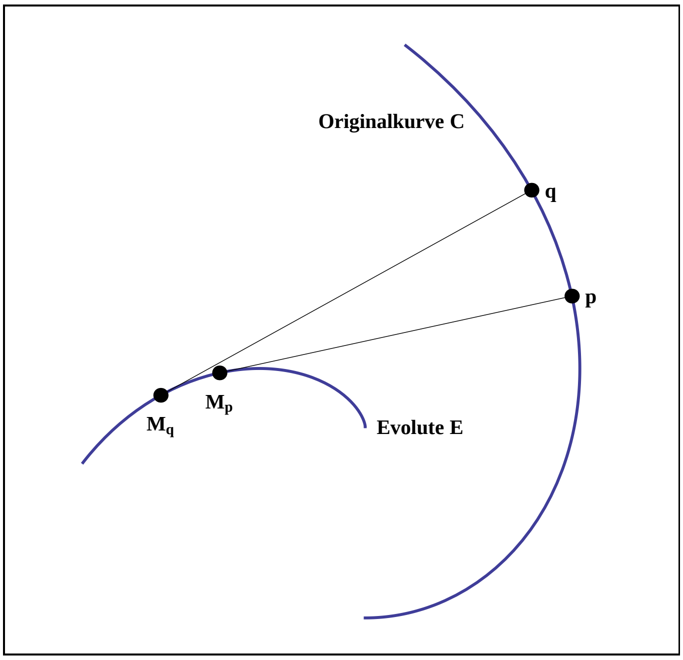
wir erhalten dann

$$(\star) \quad \begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\varphi} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\sin\varphi - r\cos\varphi = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\sin\varphi, \\
\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\varphi} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi.
\end{aligned}$$

(a) Die Ableitung $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}X$ ist gerade die Steigung der Evolute (bzw. die Steigung von deren Tangente) an der Stelle $\big(X(p), Y(p)\big) = M_p$. Aus $(\star)$ folgt andererseits

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{-1}{\tan\varphi}.$$

Da $\tan\varphi$ die Steigung der Originalkurve C (bzw. die Steitung von deren Tangente) im Punkt p ist, ist dies genau die Steigung der Geraden senkrecht zu dieser Tangente, also die Steigung der Normalen zu C durch p. Dies zeigt, daß die Gerade $\overline{pM_p}$ gleichzeitig Normale zu p durch C als auch Tangente zu E durch M_p ist.



Geometrische Bedeutung der Evolute.

(b) Bezeichnet S die Bogenlängenfunktion entlang der Evolute, so folgt aus $(\star)$ die Beziehung

$$\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2$$

und damit $\mathrm{d}S/\mathrm{d}\varphi = \pm\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi$. (Das Vorzeichen hängt davon ab, ob die Kurve C links- oder rechtsgekrümmt ist.) Das ist aber schon die Behauptung. (Diese Behauptung besagt, daß für zwei Punkte $p_1, p_2 \in C$ die Länge des Evolutenbogens zwischen den Krümmungsmittelpunkten M_{p_1} und M_{p_2} gleich dem Unterschied zwischen den Krümmungsradien r_{p_1} und r_{p_2} ist.)