7. Übung zur Differentialgeometrie: Exponentialfunktion und Geodätische

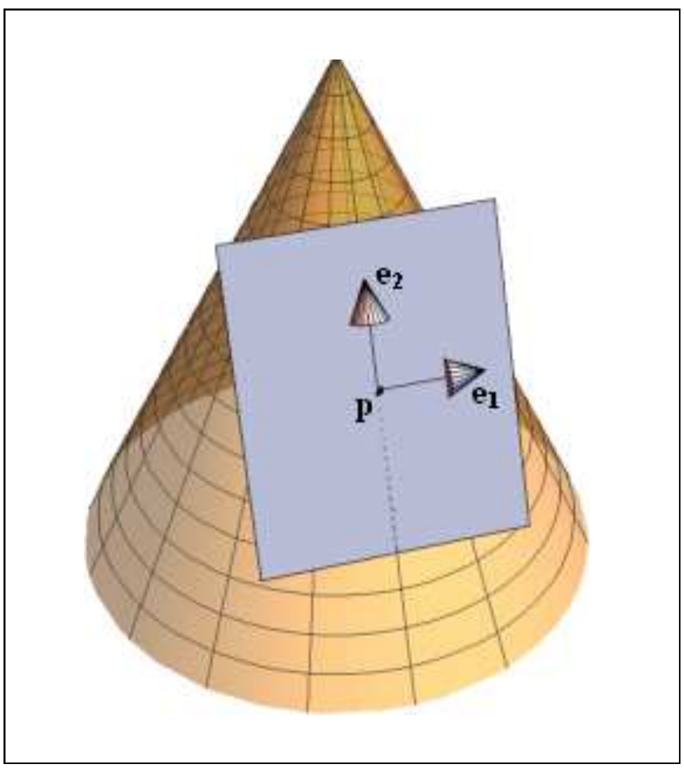
Aufgabe (7.1) Es sei $\alpha \in (0, \pi/2)$ gegeben. Wir betrachten den senkrechten Kreiskegel

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \tan\alpha = -\sqrt{x^2+y^2}\right\} \setminus \{(0,0,0)\}$$

mit dem Öffnungswinkel α. (Der Öffnungswinkel ist dabei der Winkel zwischen der Symmetrieachse und einer beliebigen Leitlinie des Kegels.)

(a) Es sei α eine beliebige Geodätische von K, die kein Meridian ist. Zeige, daß $\alpha(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist und sich für $t \to \pm\infty$ jeweils asymptotisch an eine Leitlinie des Kegels anschmiegt. Berechne ferner den Winkelunterschied $u_\infty - u_{-\infty}$, wenn $u_{\pm\infty}$ jeweils die geographische Länge der asymptotischen Leitlinie für $t \to \pm\infty$ bezeichnet. Wie viele vollständige Umrundungen des Kegels vollführt α also?

(b) Bestimme für einen beliebigen Punkt $p \in K$ die Exponentialfunktion $\exp_p$. Finde insbesondere die maximale offene Umgebung U von 0 in T_pK, auf der $\exp_p$ definiert ist, und eine maximale offene Umgebung $V \subseteq U$ von 0 in T_pK, auf der $\exp_p$ diffeomorph ist. Wähle dabei für den Tangentialraum T_pM die Orthonormalbasis (e_1, e_2), bei der e_1 in Richtung des Breitenkreises durch p und e_2 zur Kegelspitze zeigt.)



(c) Eine Geodätische starte zur Zeit $t = 0$ an einem gegebenen Punkt $p \in K$, wobei $\theta \in (0, \pi/2)$ der Winkel zwischen der Startrichtung und dem Breitenkreis durch p sei. Wie viele Umrundungen des Kegels schafft die Geodätische in Aufwärts- bzw. in Abwärtsbewegung?

Aufgabe (7.2) (a) Gib die Geodätischen eines Kegels K wie in Aufgabe (7.1) in analytischer Form an!

(b) Der Punkt $p \in K$ habe den Abstand ℓ von der Kegelspitze. Es sei α die nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $\alpha(0) = p$, die sich von p aus mit dem Steigungswinkel θ nach oben bewegt. Nach welcher Zeit T hat diese Geodätische ihre erste volle Umrundung des Kegels geschafft (wenn sie ihn denn überhaupt umrundet)?

Aufgabe (7.3) Es seien k_1, k_2 die Hauptkrümmungen und v_1, v_2 zugehörige orthogonale Hauptkrümmungsrichtungen einer Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$ in einem Punkt p. Für jeden Winkel θ sei k_θ die Schnittkrümmung von F in p zur Tangentenrichtung v_θ. Zeige, daß die folgende Formel gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_\theta \mathrm{d}\theta \;=\; \frac{k_1+k_2}{2}.$$

(Die kontinuierlich über alle Tangentenrichtungen gebildete mittlere Schnittkrümmung ist also gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Hauptkrümmungen.)

Aufgabe (7.4) Berechne die Normalkrümmung und die geodätische Krümmung eines Breitenkreises

(a) bei einem Zylinder,
(b) bei einem Kegel,
(c) bei einer Sphäre.

Aufgabe (7.5) Eine (nach Bogenlänge parametrisierte) Kurve α verlaufe vollständig innerhalb einer Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$. Wir bezeichnen mit (T, N, B) das Serret-Frenet-Dreibein von α und mit n das Einheitsnormalenfeld von F. Mit $e := n \times T$ heißt dann (T, e, n) das **Darboux-Dreibein** der Flächenkurve α, und der Ausdruck

$$\tau_g \;:=\; \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} n\big(\alpha(s)\big),\, e\big(\alpha(0)\big) \right\rangle$$

heißt die **geodätische Torsion** der Kurve α im Punkt $\alpha(0)$. (Diese Größe gibt also an, wie groß der Anteil der Änderungsrate von n senkrecht zu dem durch $\alpha'(0)$ definierten Normalschnitt ist.) Beweise folgende Aussagen!

(a) Es seien k_1, k_2 die Hauptkrümmungen von F in $p := \alpha(0)$ und (v_1, v_2) zugehörige Hauptkrümmungsrichtungen. Es sei φ der Drehwinkel, der (v_1, v_2) in (T, e) überführt. Dann gilt

$$\tau_g \;=\; (k_1 - k_2)\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

(b) Ist θ der Winkel zwischen N und n, so gilt $\theta' = \tau - \tau_g$. **Hinweis:** Leite die Gleichung $\cos\big(\theta(s)\big) = \langle N\big(\alpha(s)\big), n\big(\alpha(s)\big)\rangle$ nach s ab.

(c) Die Änderungsrate des Darboux-Dreibeins wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$T' = \kappa_g e + \kappa_n n, \quad e' = -\kappa_g T - \tau_g n, \quad n' = -\kappa_n T + \tau_g e.$$

Bemerkung: Diese Gleichungen sind analog zu den Serret-Frenet-Gleichungen $T' = \kappa N$, $N' = -\kappa T - \tau B$, $B' = \tau N$ für das Serret-Frenet-Dreibein (T, N, B).