6. Übung zur Differentialgeometrie: Geodätische Kurven

Aufgabe (6.1) Es sei α eine Geodätische auf dem Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$, die kein Meridian ist. Zeige, daß α sich unendlich oft um das Paraboloid herumwindet und sich dabei unendlich oft selbst schneidet.

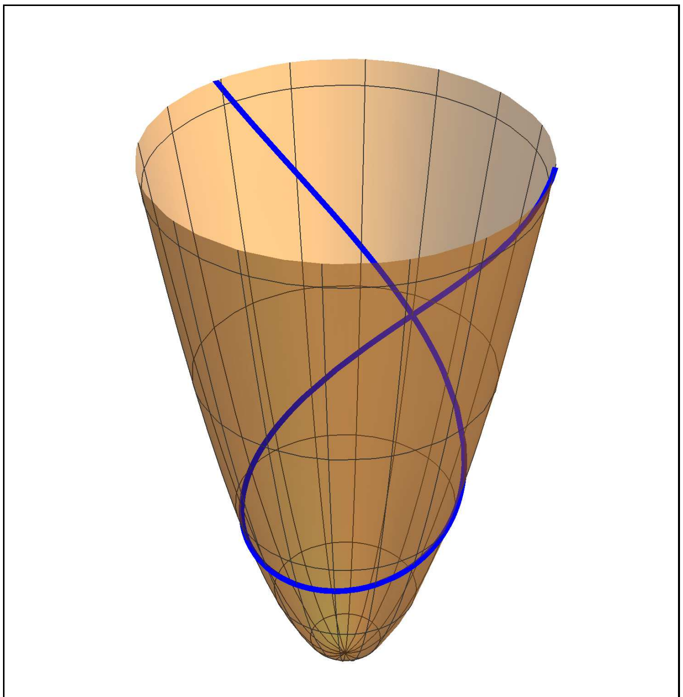

Abb. 6.1: Geodätische auf einem Rotationsparaboloid.

Aufgabe (6.2) Es sei α eine Geodätische auf dem Rotationshyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, die kein Meridian ist. Es sei B der Breitenkreis, der durch die Gleichungen $x^2 + y^2 = 1$ bzw. $z = 0$ gegeben ist. Die Geodätische α starte in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) mit $z_0 > 0$. Zeige, daß es genau die folgenden Möglichkeiten gibt:

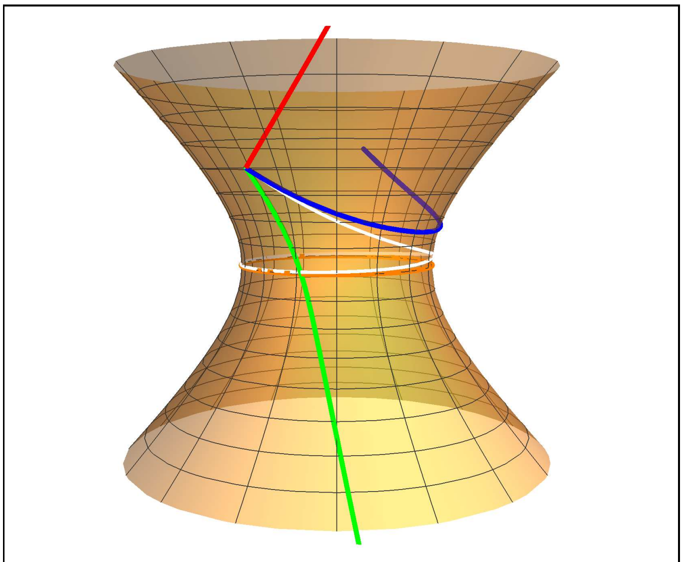

Abb. 6.2: Geodätische auf einem Rotationshyperboloid.

(a) α bewegt sich ständig nach oben, erreicht beliebig große Höhen und schmiegt sich asymptotisch an einen Meridian an;

(b) α bewegt sich zunächst nach unten, erreicht einen tiefsten Punkt und bewegt sich von diesem aus ständig nach oben wie in (a);

(c) α bewegt sich ständig nach unten und nähert sich asymptotisch an den Breitenkreis B an;

(d) α bewegt sich ständig nach unten, überquert den Breitenkreis B und verhält sich dann analog zu (a).

Aufgabe (6.3) Wir betrachten zwei Breitenkreise mit gleichem Radius auf einer Rotationsfläche, zwischen denen diese Fläche nach außen gewölbt ist. Zeige, daß eine Geodätische, die auf einem dieser Breitenkreise beginnt und anfangs tangential zu diesem verläuft, sich periodisch zwischen diesen beiden Breitenkreisen hin- und herbewegt.

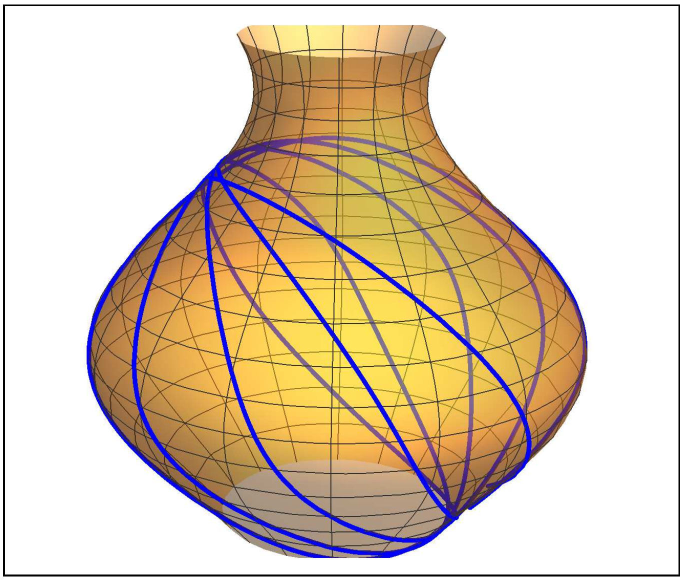

Abb. 6.3: Geodätische auf einer Rotationsfläche, die zwischen zwei Breitenkreisen oszilliert.

Aufgabe (6.4) Wir betrachten eine Geodätische α auf dem Torus mit der Parametrisierung

$$x(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Zeige: Schneidet α den Breitenkreis $v = 0$ unter dem Winkel θ und gilt $\cos\theta < (R-r)/(R+r)$, so schneidet α auch den Breitenkreis $v = \pi$ und windet sich unendlich oft um den Torus herum.

Aufgabe (6.5) Wir betrachten zwei Punkte $p \neq q$ auf einer Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$. Unter allen innerhalb von F verlaufenden Kurven $\alpha : [t_1, t_2] \to F$ mit $\alpha(t_1) = p$ und $\alpha(t_2) = q$ sei γ eine solche, die das **Energiefunktional** $\int_{t_1}^{t_2} \|\dot\alpha(t)\|^2 \mathrm{d}t$ minimiert. Zeige, daß dann γ zwangsläufig eine Geodätische ist!

Hinweis: Stelle die Euler-Lagrange-Gleichung für das Energiefunktional auf! Was folgt aus der Beltrami-Bedingung?