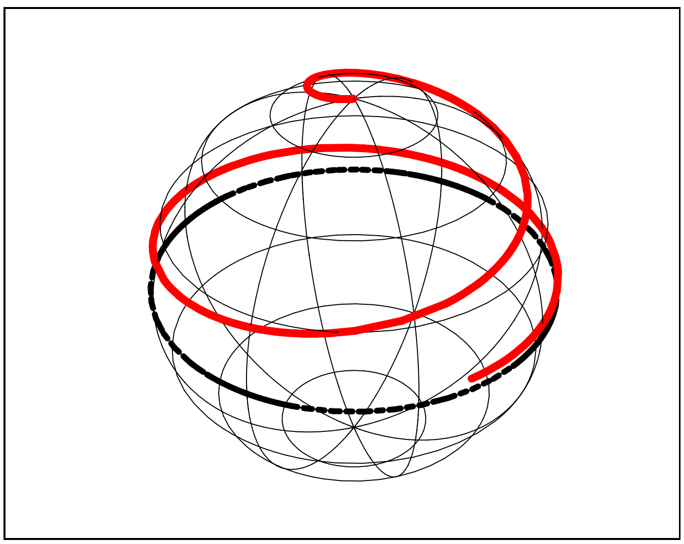
5. Übung zur Differentialgeometrie: Geodätische Kurven

Aufgabe (5.1) Zeige, daß eine parametrisierte Kurve α auf einer Sphäre genau dann eine Geodätische ist, wenn sie mit konstanter Geschwindigkeit einen Teil eines Großkreises durchläuft. Gib für zwei gegebene Punkte $P \neq Q$ auf der Sphäre eine geodätische Kurve von P nach Q in möglichst expliziter Form an!

Aufgabe (5.2) Die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ sei durch Kugelkoordinaten (φ, θ) parametrisiert. Gib die Gleichungen für die Geodätischen in der Form $\theta = \theta(\varphi)$ an.

Aufgabe (5.3) Eine **Loxodrome** ist eine Kurve auf einer Kugeloberfläche, die einen konstanten Winkel β mit der Nordrichtung bildet.



(a) Stelle die Gleichung einer Loxodrome in der Form $\theta = \theta(\varphi)$ dar, wenn φ die geographische Länge und θ die geographische Breite bezeichnet.

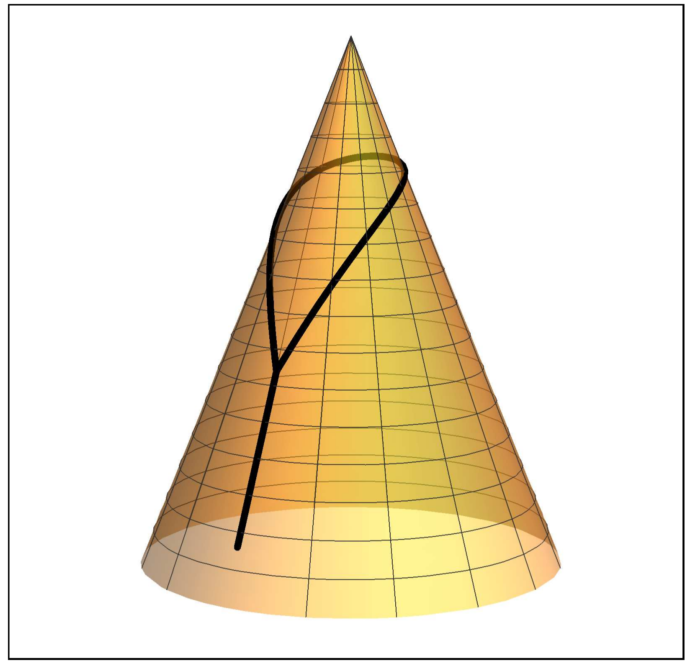
(b) Bestimme die Bogenlänge einer maximal fortgesetzten Loxodrome.

Bemerkung. Der Begriff "Loxodrome" bedeutet etwa so viel wie "Schieflaufende" (gr. *loxos* "schief", *dromos* "Lauf"; vgl. Motodrom, Hippodrom, Dromedar). Solche Kurven waren für die Schiffsnavigation wichtig, weil man leicht einen konstanten Kurs zur Nordrichtung halten kann. Demgegenüber wird eine geodätische Kurve auf der Sphäre auch als "Orthodrome" bezeichnet, was so viel wie "Geradlaufende" bedeutet (gr. *orthos* "gerade").

Aufgabe (5.4) Wir betrachten einen senkrechten Kreiszylinder vom Radius R mit der z-Achse als Symmetrieachse. Gib für zwei gegebene Punkte $P \neq Q$ auf dem Zylinder möglichst explizit alle geodätischen Kurven von P nach Q an!

Aufgabe (5.5) Wir betrachten einen senkrechten Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel α zwischen der Symmetrieachse und jeder Leitlinie. Dieser Kegel stehe mit der Spitze nach oben auf dem Boden und habe eine glatte Oberfläche.

(a) Wir werfen eine Lassoschlinge über den Kegel und ziehen das Seil straff. Welche Form hat die Kurve, entlang der sich die Schlinge um den Kegel legt? Handelt es sich um eine ebene Kurve?



(b) Wenn der Winkel α zu groß (der Kegel also zu flach) ist, legt sich die Lassoschlinge nicht straff um den Kegel, sondern rutscht beim Straffziehen über die Kegelspitze weg. Ab welchem Wert für α ist dies der Fall?

Aufgabe (5.6) Eine Geodätische auf dem Torus mit der Parametrisierung

$$x(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$$

beginne an einem Punkt des oberen Kreises $\theta = \pi/2$, und zwar in einer Richtung tangential zu diesem Kreis. Beschreibe den weiteren Verlauf dieser Geodätischen!