4. Übung zur Differentialgeometrie: Christoffelsymbole und geodätische Kurven

Aufgabe (4.1) Bei einer parametrisierten Fläche $(u,v) \mapsto x(u,v) \in \mathbb{R}^3$ wird die Bewegung des Dreibeins (x_u, x_v, N) durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma^1_{11} x_u + \Gamma^2_{11} x_v + eN, \\ x_{uv} &= \Gamma^1_{12} x_u + \Gamma^2_{12} x_v + fN, \\ x_{vu} &= \Gamma^1_{21} x_u + \Gamma^2_{21} x_v + fN, \\ x_{vv} &= \Gamma^1_{22} x_u + \Gamma^2_{22} x_v + gN, \\ N_u &= a_{11} x_u + a_{21} x_v, \\ N_v &= a_{12} x_u + a_{22} x_v \end{aligned}$$

mit

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}.$$

Benutze diese Gleichungen, um aus den Identitäten

$$x_{uuv} = x_{uvu}, \quad x_{vvu} = x_{vuu}, \quad N_{uv} = N_{vu}$$

Verträglichkeitsbedingungen für die Christoffelsymbole Γ^k_{ij} herzuleiten.

Aufgabe (4.2) Es seien f, g Funktionen mit $f > 0$. Lassen wir die Kurve $v \mapsto \big(f(v), 0, g(v)\big)$ um die z-Achse rotieren, so entsteht eine Rotationsfläche mit der Parametrisierung

$$x(u,v) = \begin{bmatrix} f(v)\cos(u) \\ f(v)\sin(u) \\ g(v) \end{bmatrix}.$$

Berechne für diese Rotationsfläche die Christoffelsymbole!

Aufgabe (4.3) Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine in M verlaufende Kurve und v, w Vektorfelder entlang α. Beweise die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle v(t), w(t)\rangle = \langle \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}t}, w(t)\rangle + \langle v(t), \frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{d}t}\rangle.$$

Zeige ferner: Sind v und w parallel entlang α, so ist die Funktion $t \mapsto \langle v(t), w(t)\rangle$ konstant. Ferner sind auch die Länge von $v(t)$, die Länge von $w(t)$ sowie der Winkel zwischen $v(t)$ und $w(t)$ konstant.

Aufgabe (4.4) Wir betrachten den Nordpol $n = (0,0,r)$ der Sphäre um $(0,0,0)$ mit Radius r und zwei Punkte p, q auf dem Breitenkreis zum fest vorgegebenen Breitengrad φ. Wir betrachten ferner den Einheitstangentenvektor $v \in T_n\mathbb{S}^2$ des Meridianbogens np in n. Auf v wenden wir nun eine Parallelverschiebung entlang des Meridianbogens np an, dann eine Parallelverschiebung entlang des Breitenkreisbogens pq und anschließend eine Parallelverschiebung entlang des Meridianbogens qn; es sei $w \in T_n\mathbb{S}^2$ der aus diesen drei Parallelverschiebungen resultierende Vektor. Welchen Winkel bildet w mit dem ursprünglichen Vektor v?

Aufgabe (4.5) Die geodätischen Kurven auf einer Fläche $M \subseteq \mathbb{R}^3$ sind in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$(\star) \qquad \begin{aligned} 0 &= \ddot u + \Gamma^1_{11}\dot u^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot u\dot v + \Gamma^1_{22}\dot v^2, \\ 0 &= \ddot v + \Gamma^2_{11}\dot u^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot u\dot v + \Gamma^2_{22}\dot v^2. \end{aligned}$$

Zeige: Ist die betrachtete geodätische Kurve keine Koordinatenlinie (ist also weder u noch v konstant), so zieht jede der beiden Gleichungen in $(\star)$ die jeweils andere automatisch nach sich.

Hinweis: Ersetze in $(\star)$ die Christoffelsymbole gemäß den Gleichungen

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{bmatrix}$$

und nutze ferner aus, daß geodätische Kurven stets konstante Geschwindigkeit haben, daß also $E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2$ konstant ist.

Aufgabe (4.6) Wir betrachten eine Rotationsfläche M wie in Aufgabe (4.2). Die Koordinatenlinien $u = \text{const}$ heißen **Meridiane**, die Koordinatenlinien $v = \text{const}$ heißen **Breitenkreise**.

(a) Formuliere die Differentialgleichungen für die geodätischen Kurven auf M!
(b) Welche Meridiane sind geodätische Kurven?
(c) Welche Breitenkreise sind geodätische Kurven?
(d) Welche Differentialgleichung muß eine geodätische Kurve erfüllen, die weder ein Meridian noch ein Breitenkreis ist?
(e) Für eine geodätische Kurve α wie in (d) bezeichnen wir mit $\theta(v)$ den Winkel, unter dem α den Breitenkreis zum Parameterwert v schneidet; ferner sei $r(v)$ der Radius dieses Breitenkreises. Zeige, daß dann die Funktion $v \mapsto r(v)\cos\big(\theta(v)\big)$ konstant ist. (Die Gleichung $r\cos\theta = \text{const}$ bezeichnet man als **Clairautsche Relation**.)