3. Übung zur Differentialgeometrie: Flächen im Raum

Aufgabe (3.1) Ist N ein Einheitsnormalenfeld auf einer Fläche $M \subseteq \mathbb{R}^3$, so kann man N als eine Abbildung $N : M \to \mathbb{S}^2$ auffassen. Bestimme das Bild dieser Abbildung für die folgenden Flächen!

(a) irgendeine Ebene
(b) Zylinder mit Radius r
(c) Kegel mit Öffnungswinkel α
(d) Rotationsparaboloid: $z = x^2 + y^2$
(e) Rotationshyperboloid: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
(f) Katenoid: $x^2 + y^2 = \cosh(z)^2$

Aufgabe (3.2) Bestimme für jede der folgenden Flächen die erste und die zweite Fundamentalform, eine Matrixdarstellung des Krümmungsoperators sowie die Gaußsche und die mittlere Krümmung!

(a) Torus:
$x(u,v) = \big((R+r\cos v)\cos u, (R+r\cos v)\sin u, r\sin v\big)$
(b) Helikoid:
$x(u,v) = \big(v\cos u, v\sin u, du\big)$
(c) Rotationsfläche:
$x(u,v) = \big(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)\big)$

Aufgabe (3.3) Wir betrachten eine Fläche $M \subseteq \mathbb{R}^3$, einen Punkt $p \in M$ und einen Einheitsvektor $v \in T_pM$. Ferner sei N ein Einheitsnormalenfeld auf M. Zeige: Ist α eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in M mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = v$, so gilt

$$\langle v, \mathfrak{C}_p(v)\rangle \;=\; \langle N(p), \kappa(p)\, n(p)\rangle,$$

wenn wir mit κ die Krümmung und mit n die Hauptnormale der Kurve α bezeichnen.

Aufgabe (3.4) Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche und $p \in M$ ein Punkt in M. Ferner sei $\mathfrak{C}_p : T_pM \to T_pM$ der Krümmungsoperator von M im Punkt p.

(a) Zeige: Sind die Eigenwerte von $\mathfrak{C}_p$ entweder alle positiv oder alle negativ, so gibt es eine Umgebung von p in M, die ganz auf einer Seite der Hyperebene $p + T_pM$ liegt. (Ist dies der Fall, so heißt p ein **elliptischer Punkt**. Die Hyperfläche M krümmt sich in einem solchen Punkt also in allen Richtungen von T_pM weg, wie dies etwa bei einem Ellipsoid der Fall ist.)

(b) Hat $\mathfrak{C}_p$ sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert, so liegen in jeder Umgebung von p in M Punkte auf beiden Seiten der Hyperebene $p + T_pM$. (Ist dies der Fall, so heißt p ein **hyperbolischer Punkt**. Die Hyperfläche M krümmt sich in einem solchen Punkt in verschiedenen Richtungen auf verschiedene Seiten von T_pM, wie dies etwa bei einem Hyperboloid der Fall ist.)

(c) Welche Punkte auf einer Torusoberfläche sind elliptisch, welche sind hyperbolisch?

Aufgabe (3.5) Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, $p \in M$ ein Punkt in p und N ein Einheitsnormalenfeld auf M. Für jede meßbare Umgebung U von p in M bezeichnen wir mit $N_U := \{N(x) \mid x \in U\} \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ das Normalenbild von U. Zeige: Ist (U_k) eine Folge von Umgebungen, die gegen den Punkt p zusammenschrumpfen, so gilt

$$|K(p)| \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{\mu(N_{U_k})}{\mu(U_k)}\,.$$

Aufgabe (3.6) (a) Das **Helikoid** H sei definiert als die Fläche mit der Parameterdarstellung

$$x(u,v) \;=\; \begin{bmatrix} v\cos u \\ v\sin u \\ du \end{bmatrix} \qquad (0 < u < 2\pi, v > 0),$$

wobei $d > 0$ eine fest vorgegebene Zahl sei. (Diese Fläche entsteht aus der Helix $u \mapsto (\cos u, \sin u, du)$, indem man jeden Punkt dieser Schraubenlinie durch ein horizontal verlaufendes Geradenstück mit der z-Achse verbindet.) Berechne die erste und die zweite Fundamentalform von H.

(b) Das **Katenoid** K sei definiert als die Fläche mit der Parameterdarstellung

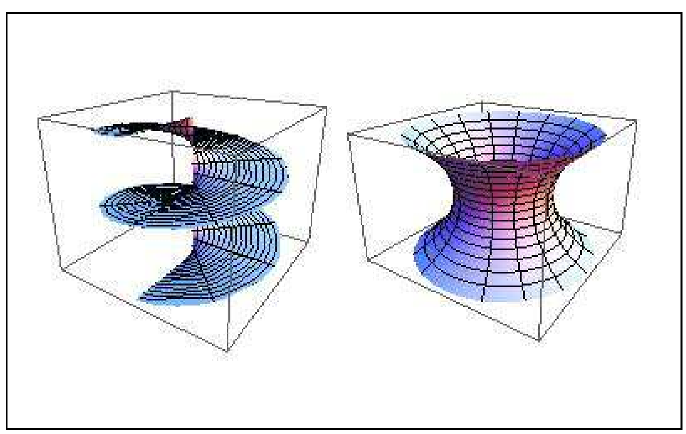
$$x(u,v) \;=\; \begin{bmatrix} d\cosh v\cos u \\ d\cosh v\sin u \\ dv \end{bmatrix} \qquad (0 < u < 2\pi, v > 0),$$

wobei $d > 0$ eine fest vorgegebene Zahl sei. (Diese Fläche entsteht durch Rotation der Kettenlinie $x = (1/d)\cosh(z/d)$ um die z-Achse.) Berechne die erste und die zweite Fundamentalform von K.

(c) Zeige, daß eine lokale Isometrie $f : K \to H$ gegeben ist durch

$$\begin{bmatrix} d\cosh(v)\cos(u) \\ d\cosh(v)\sin(u) \\ dv \end{bmatrix} \;\mapsto\; \begin{bmatrix} d\sinh(v)\cos(u) \\ d\sinh(v)\sin(u) \\ du \end{bmatrix}.$$

(Das bedeutet, daß f lokal eine Bijektion ist, die die erste Fundamentalform erhält.) Argumentiere, daß ein zweidimensionaler Käfer, der auf H oder K lebt, nicht (durch Längen-, Winkel- oder Flächenmessungen) unterscheiden kann, ob er auf einem Helikoid oder einem Katenoid lebt.)



Helikoid (links) und Katenoid (rechts).