2. Übung zur Differentialgeometrie: Räumliche Kurven

Aufgabe (2.1) Es seien $R > r > 0$ und $u, v \neq 0$ vorgegebene Zahlen. Welche Art von Kurve ist durch die Parameterdarstellung

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} \cos(ut)\big(R + r\cos(vt)\big) \\ \sin(ut)\big(R + r\cos(vt)\big) \\ r\sin(vt) \end{bmatrix}$$

gegeben? Unter welchen Bedingungen handelt es sich um eine geschlossene Kurve?

Aufgabe (2.2) Bestimme für die folgenden Kurven jeweils Krümmung und Torsion sowie das Serret-Frenet-Dreibein!

(a) $\alpha(t) = \big(r\cos t, r\sin t, ht/(2\pi)\big)$
(b) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$

Aufgabe (2.3) Ein Intervall I, eine Funktion $\kappa : I \to (0, \infty)$ und eine Funktion $\tau : I \to \mathbb{R}$ seien vorgegeben.

(a) Zeige, daß es eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ gibt, deren Krümmung κ und deren Torsion τ ist!
(b) Zeige, daß eine andere Kurve $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ genau dann ebenfalls die Krümmung κ und die Torsion τ hat, wenn es eine feste Drehung D und einen festen Vektor v gibt mit $\beta(t) = D\alpha(t) + v$ für alle $t \in I$.

Aufgabe (2.4) Es sei $s \mapsto \alpha(s) \in \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, für die $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ stets linear unabhängig sind. Drücke die ersten vier Ableitungen von α in Koordinaten bezüglich des Serret-Frenet-Dreibeins (T, N, B) aus!

Aufgabe (2.5) Es sei $s \mapsto \alpha(s)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve derart, daß $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ für jeden Wert s linear unabhängig sind. Zeige, daß es zu jedem Wert s_0 eine eindeutig bestimmte Kugel $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - m\| \leq R\}$ derart gibt, daß für die Funktion

$$a(s) := \|\alpha(s) - m\|^2 - R^2$$

(die beschreibt, wie sich die Kurve von der Kugeloberfläche entfernt) die Gleichungen $\alpha^{(k)}(s_0) = 0$ für $0 \leq k \leq 3$ gelten. (Man nennt diese Kugel die **Schmiegkugel** an die Kurve α im Punkt $\alpha(s_0)$.)

Hinweis: Mache den Ansatz $\alpha(s_0) - m = v_1 T(s_0) + v_2 N(s_0) + v_3 B(s_0)$, wenn (T, N, B) das Serret-Frenet-Dreibein der Kurve bezeichnet.

Aufgabe (2.6) Es sei $s \mapsto \alpha(s) \in \mathbb{R}^3$ eine Raumkurve, für die $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ stets linear unabhängig sind. Welche Bedingung müssen die Krümmung κ und die Torsion τ der Kurve erfüllen, damit α eine sphärische Kurve ist, also ganz innerhalb einer Kugeloberfläche verläuft?

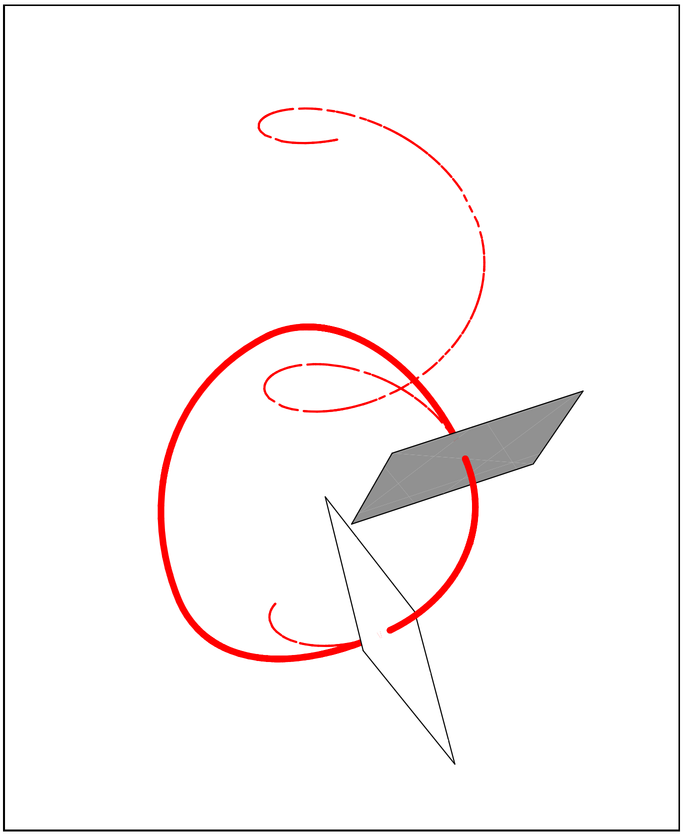
Aufgabe (2.7) Gegeben seien eine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine reguläre C^2-Kurve, die auf einer Seite von E verläuft und die Ebene E senkrecht trifft. Zeige: Setzt man α durch Spiegelung an der Ebene E fort, so ist die fortgesetzte Kurve immer noch eine reguläre C^2-Kurve.

Aufgabe (2.8) Für gegebene Zahlen $0 < d < r$ betrachten wir die Schraubenlinie

$$\alpha(t) := \begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ d \cdot t \end{bmatrix}.$$

(a) Zeige, daß es $t_1 < t_2$ derart gibt, daß die Tangentialvektoren $\dot\alpha(t_1)$ und $\dot\alpha(t_2)$ aufeinander senkrecht stehen.

(b) Wir bezeichnen mit E_1 die Ebene durch $\alpha(t_1)$ mit Normalenvektor $\dot\alpha(t_1)$ und mit E_2 die Ebene durch $\alpha(t_2)$ mit Normalenvektor $\dot\alpha(t_2)$. Zeige: Spiegelt man das Kurvenstück $\alpha([t_1, t_2])$ an E_2 und die so verlängerte Kurve an E_1, so ergibt sich eine geschlossene C^2-Kurve konstanter Krümmung, die kein Kreis ist.



Geschlossene Raumkurve konstanter Krümmung.