

Lösen von Anwendungsproblemen I

WS 2016/2017



Hochschule **RheinMain**
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Kalibration eines Mehrkameranasytems

Lilija Naiwert

17.10.2016

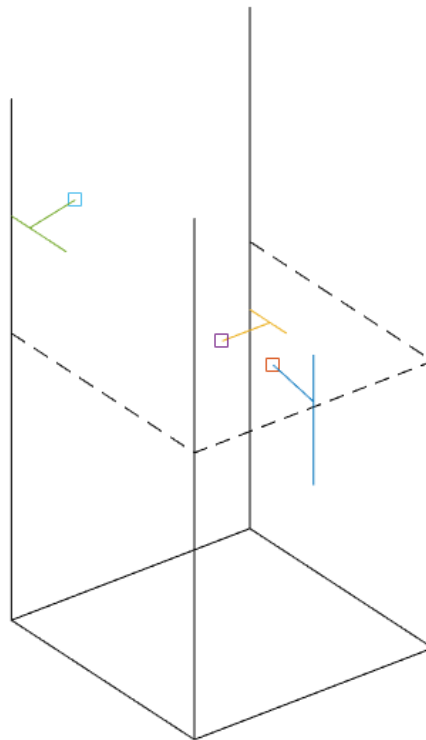
Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kameramodell	2
2.1	Koordinatensysteme	2
2.2	Schätzparameter	4
2.2.1	Brettparameter	6
2.3	Abbildungsvorschrift	6
3	Theorie des Schätzverfahrens	7
3.1	Lineare Ausgleichsrechnung	7
3.1.1	Algebraische Herleitung	7
3.1.2	Analytische Herleitung	8
3.2	Nichtlineare Ausgleichsrechnung	9
4	Schätzverfahren	10
4.1	Berechnung partieller Ableitungen	10
5	Matlab Programme	15
5.1	Schätzprogramm	15
6	Internetverzeichnis	23

1 Einleitung

Wird ein Bild mit einer Kamera aufgenommen, so ist dies eine Abbildung aus der dreidimensionalen Welt in ein zweidimensionales Bild. Um ein annähernd perfektes Bild zu erhalten, muss die Kamera zunächst kalibriert werden. Das Ziel einer Kamerakalibrierung ist alle auftretenden Kameraparameter der Abbildung, die Punkte aus dem uns umgebenden dreidimensionalen Raum auf Pixelpunkte, also Punkte im Bild, projiziert, bestmöglich abzuschätzen. Diese Parameter beschreiben die äußere und die innere Geometrie der Kamera, d.h. die Position sowie Orientierung der Kamera im Raum, die Brennweite und die Verzerrungskoeffizienten sind zu schätzen. Die Kenntnis dieser Parameter ermöglicht es zum Beispiel Bildverzerrungen zu korrigieren und so ein annähernd perfektes Bild zu erhalten. Die möglichst hohe Genauigkeit dieser Parameter ist wichtig um die Kamera sinnvoll nutzen zu können, denn um beispielsweise Messungen mit ihr durchzuführen muss sichergestellt sein, dass die erhaltenen Messpunkte korrekt sind.

Das Ziel dieser Ausarbeitung ist eine Kamerakalibrierung für einen Versuchsaufbau der Firma Vitronic durchzuführen. Der Aufbau besteht aus insgesamt drei Kameras, die auf einem Gestell in verschiedenen Höhen angebracht sind. Mit jeder der Kameras wurde für 27 Positionen eines Brettes mit 130 markierten Punkten ein Bild gemacht. Das Brett wurde für jedes Bild neu positioniert.



Versuchsaufbau mit drei Kameras

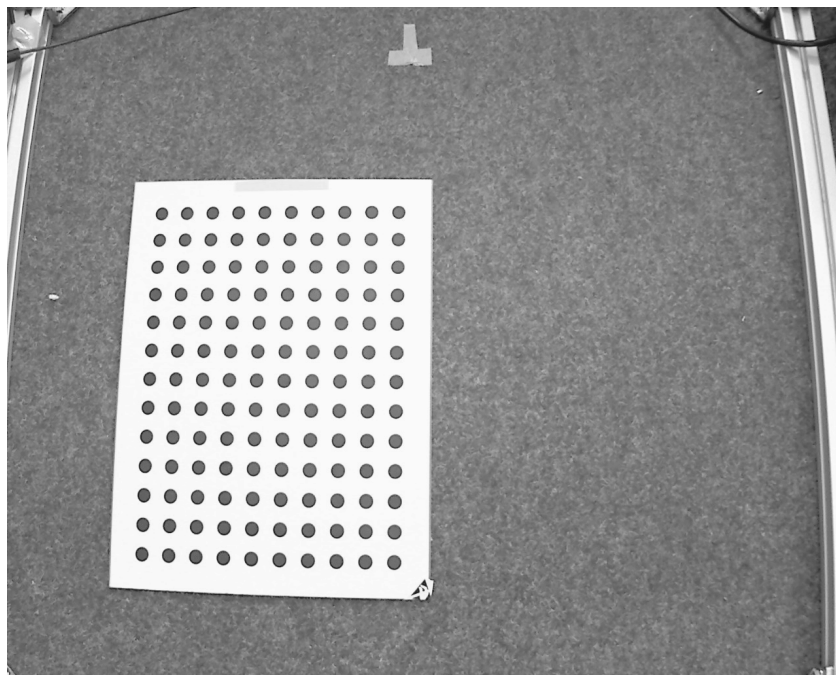
2 Kameramodell

Bevor wir beginnen die Abbildungsvorschrift aufzustellen erläutern wir zunächst die dafür verwendeten Koordinatensysteme und die später auftretenden Kameraparameter.

2.1 Koordinatensysteme

Weltkoordinatensystem

Die Punkte des zu fotografierenden Objekts und die Position der Kamera werden in Weltkoordinaten beschrieben. Das Weltkoordinatensystem $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ beschreibt den uns umgebenden dreidimensionalen Raum, wobei der Ursprung und die Richtungen der drei Achsen genau definiert sein müssen. In unserem konkreten Fall definieren wir als Referenzlage die erste Position, die das Brett mit den Punkten annimmt. Der Ursprung liegt im Mittelpunkt des ersten gemessenen Punktes. Im Bild ist dieser in der markierten Ecke zu finden. Die Achsen x und y spannen die Brettebene auf und z zeigt senkrecht aus dem Brett heraus.



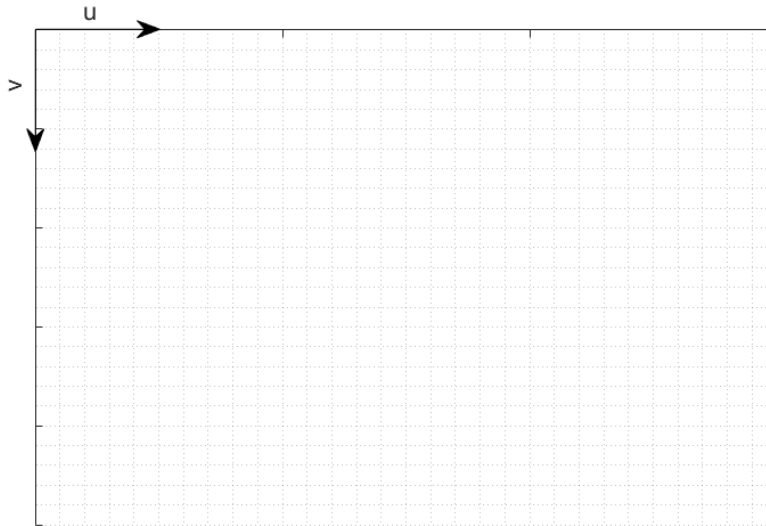
Versuchsaufbau mit drei Kameras

Kamerakoordinatensystem

Die in Weltkoordinaten beschriebenen Objektpunkte müssen in Kamerakoordinaten umgewandelt werden. Die Koordinatensysteme sind durch Rotation und Translation, welche durch die äußere Orientierung beschrieben werden, miteinander verbunden. Wir definieren den Ursprung des Kamerakoordinatensystems $(x_K, y_K, z_K) \in \mathbb{R}^3$ im optischen Zentrum, welches sich im Mittelpunkt der Linse befindet. Die Richtungen der drei Achsen werden durch die Rotation des Weltkoordinatensystems festgelegt und beschreiben die Aufnahmerichtung der Kamera.

Sensorkoordinatensystem

Das gespeicherte digitale Bild besitzt das aus Zeilen und Spalten bestehende links-händige Sensorkoordinatensystem $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Die innere Orientierung beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Kamerakoordinatensystem und dem Sensorkoordinatensystem. Der Ursprung des Systems wird im oberen linken Eckpunkt des Bildes definiert. In unserem Fall besteht das System aus 1280 Pixeln in u -Richtung und 1024 Pixeln in v -Richtung.



Sensorkoordinatensystem (u, v)

2.2 Schätzparameter

Es muss Parameter geben, die jeden Weltkoordinatenpunkt korrekt auf einen Pixelkoordinatenpunkt umwandeln. Die auftretenden Kameraparameter der Abbildungsvorschrift $(x, y, z) \rightarrow (u, v)$ beschreiben wie oben erwähnt die äußere und innere Orientierung der Kamera. Die äußere Orientierung wird durch die extrinsischen und die innere Orientierung durch die intrinsischen Kameraparameter beschrieben.

Extrinsische Kameraparameter

Die extrinsischen oder auch äußeren Kameraparameter beschreiben die äußere Geometrie, das heißt die Position und die räumliche Orientierung der Kamera. Der Vektor $p = (p_1 \ p_2 \ p_3)^T \in \mathbb{R}^3$ beschreibt die Position in Weltkoordinaten und liegt hier im optischen Zentrum der Kamera. Die räumliche Orientierung wird durch die Matrix $g := (g_1 \ | \ g_2 \ | \ g_3)$ beschrieben, welche ein Element der Gruppe aller Drehmatrizen $SO(3)$ ist. Die Rotationsmatrix g parametrisieren wir durch die drei Eulerwinkel α, β und γ . Zusammenfassend benötigen wir also für die Beschreibung des Objektpunktes in Kamerakoordinaten die

- Translation in x -Richtung (p_1) ,
- Translation in y -Richtung (p_2) ,

- Translation in z-Richtung (p_3),
- Rotation um z-Achse (Winkel α),
- Rotation um x-Achse (Winkel β),
- Rotation um z-Achse (Winkel γ).

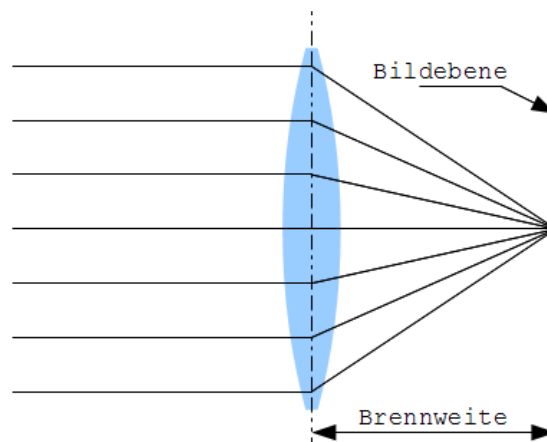
Somit haben wir für jede Kamera drei Translationsparameter und drei Rotationsparameter.

Intrinsische Kameraparameter

Die intrinsischen oder auch inneren Kameraparameter beschreiben die innere Geometrie der Kamera. Hierzu gehören die Brennweite f und die Verzerrungskoeffizienten k_1 und k_2 der Linse. Diese werden im folgenden kurz beschrieben.

- Brennweite

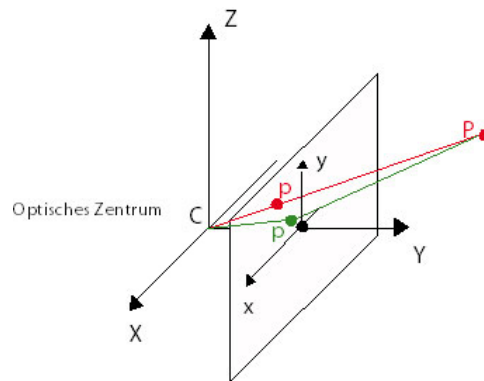
Betrachten wir das folgende Bild. Links befindet sich das zu fotografierende Objekt, von wo Lichtstrahlen parallel auf die Linse treffen. Senkrecht durch die Linse verläuft die Hauptebene. Die auftreffenden Lichtstrahlen werden gebrochen und treffen sich in einem gemeinsamen Punkt, dem Brennpunkt. Der Abstand zwischen dem Brennpunkt und der Hauptebene ist dann die Brennweite f .



Ist eine sehr große Brennweite gegeben, so wird der Bildwinkel enger und somit auch der Bildausschnitt. Mit zunehmender Brennweite nimmt also der Vergrößerungsfaktor zu.

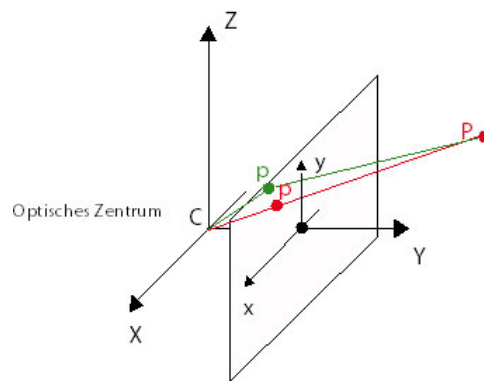
- **Verzerrung**

Wird ein Punkt von Weltkoordinaten in Sensorkoordinaten abgebildet, erscheint dieser meist anders als theoretisch erwartet. Das Bild kann verzerrt sein, was an der Anzahl der Linsen und an den Linsenkrümmungen selbst liegt. Bereits eine kleine Verzerrung kann zu sehr großen Verfälschungen in der Rekonstruktion führen. Wir beschreiben kurz die radiale Verzerrung. Man unterscheidet zwischen kissenförmigen und tonnenförmigen Verzerrungen. Bei der kissenförmigen Verzerrung ist der Abstand des Bildpunktes, in Sensorkoordinaten, zum Brennpunkt kleiner, als bei einer idealen Projektion ohne Verzerrung. Das Bild ist also mehr zur Bildmitte verzerrt.



Kissenförmige Verzerrung

Bei der tonnenförmigen Verzerrung ist der Abstand des Bildpunktes, in Sensorkoordinaten, zum Brennpunkt größer, als bei einer idealen Projektion ohne Verzerrung. Das Bild ist also von der Bildmitte weg verzerrt.



tonnenförmige Verzerrung

Um die Verzerrung in unsere Abbildung einzubeziehen müssen zwei Parameter k_1 und k_2 geschätzt werden, womit wir für jede der drei Kameras drei innere Schätzparameter haben.

2.2.1 Brettparameter

Zusätzlich zu den extrinsischen und intrinsischen Parameter müssen die Position und Lage jeder Stellung des Brettes geschätzt werden. Aus der ersten Position wird das Brett in s weitere Stellungen gebracht, wobei wir die Position und Lage der ersten Stellung kennen, da diese als Referenz genutzt wird. Wir müssen also für jede Kamera zusätzlich für $1 \leq i \leq s$ die Position q_i und die Lage h_i schätzen, welche zusammen die Stellung im Raum festlegen.

2.3 Abbildungsvorschrift

Betrachten wir das Modell für eine der drei Kameras als einfache Lochkamera mit Brennweite f und optischem Zentrum in einem Punkt p , es tritt also keine Verzerrung auf. Die Lage der Kamera ist gegeben durch $g = (g_1 \mid g_2 \mid g_3)$, wobei die Vektoren g_1 und g_2 die Bildebene aufspannen. Der Vektor g_3 steht senkrecht auf dieser und zeigt in Richtung der optischen Achse. Zunächst behandeln wir nur die erste Position, die das Brett annimmt.

Es sei x ein beliebiger im Bild erscheinender Punkt. Da das Brett in der ersten Position flach auf dem Boden liegt, sind die Koordinaten der Punkte auf dem Brett gegeben durch $x_i = (\xi_i, \eta_i, 0)$. Diese Koordinaten kennen wir, da die Anordnung der Punkte auf dem Brett genau bekannt ist und wir denn ersten Punkt als Ursprung des Weltkoordinatensystems gewählt haben. Wird das Bild gemacht, so geht der Lichtstrahl von einem Punkt x aus durch das optische Zentrum p und durchschneidet die Bildebene. Der Bildpunkt ergibt sich als Schnittpunkt dieser Linie $x + \mathbb{R}(p-x)$ mit der Bildebene $p + \mathbb{R}g_1 + \mathbb{R}g_2 - fg_3$. Es muss also reelle Zahlen λ , u und v geben, sodass das Gleichungssystem

$$x + \lambda(p-x) = p + ug_1 + vg_2 - fg_3$$

gilt, wobei u und v die gesuchten Bildkoordinaten sind. Bilden wir in dieser Gleichung das Skalarprodukt mit g_i

$$\begin{aligned} \langle x, g_i \rangle + \lambda \langle p-x, g_i \rangle &= \langle p, g_i \rangle + u \langle g_1, g_i \rangle + v \langle g_2, g_i \rangle - f \langle g_3, g_i \rangle \\ \lambda \langle p-x, g_i \rangle - \langle p-x, g_i \rangle &= u \langle g_1, g_i \rangle + v \langle g_2, g_i \rangle - f \langle g_3, g_i \rangle \\ (\lambda-1) \langle p-x, g_i \rangle &= u \langle g_1, g_i \rangle + v \langle g_2, g_i \rangle - f \langle g_3, g_i \rangle \end{aligned}$$

und setzen nacheinander $i = 1, 2, 3$ ein, erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} u &= (\lambda-1) \langle p-x, g_1 \rangle, \\ v &= (\lambda-1) \langle p-x, g_2 \rangle, \\ -f &= (\lambda-1) \langle p-x, g_3 \rangle. \end{aligned}$$

Auflösen der letzten Gleichung nach $\lambda-1$ ergibt $\lambda-1 = \frac{-f}{\langle p-x, g_3 \rangle}$. Setzen wir dies in die Gleichungen für u und v ein, erhalten wir die Messgleichungen

$$u = -f \cdot \frac{\langle p-x, g_1 \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle} \quad \text{und} \quad v = -f \cdot \frac{\langle p-x, g_2 \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle}.$$

Für jeden Punkt $x_i = (\xi_i, \eta_i, 0)$ erhalten wir nun, ohne Berücksichtigung der Verzerrung, für die erste Position des Brettes die Bildkoordinaten

$$u_i = -f \cdot \frac{\langle p-x_i, g_1 \rangle}{\langle p-x_i, g_3 \rangle} \quad \text{und} \quad v_i = -f \cdot \frac{\langle p-x_i, g_2 \rangle}{\langle p-x_i, g_3 \rangle}.$$

Es treten bereits die ersten sieben Schätzparameter $p_1, p_2, p_3, \alpha, \beta, \gamma, f$ auf.

Da das Brett für jedes Bild neu positioniert wird, müssen wir die neue Position und Lage des

Brettes ab hier für jedes Bild neu bestimmen. Die neue Position des Punktes in der markierten Ecke des Brettes ist $q = (q_1, q_2, q_3)$ und die neue Lage des Brettes ist $h = (h_1 \mid h_2 \mid h_3)$, wobei h_1 und h_2 die Brettebene aufspannen und $h_3 = h_1 \times h_2$ senkrecht aus dieser herauszeigt. Die markierten Punkte mit den Koordinaten $x_i = (\xi_i, \eta_i, 0)$ aus der ersten Position des Brettes haben nun die neuen Koordinaten

$$\tilde{x}_i = q + \xi_i h_1 + \eta_i h_2 = q + h \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ 0 \end{bmatrix} = q + h x_i.$$

Somit erhalten wir als neue Messgleichungen

$$\tilde{u}_i = -f \cdot \frac{\langle p - q - h x_i, g_1 \rangle}{\langle p - q - h x_i, g_3 \rangle} \quad \text{und} \quad \tilde{v}_i = -f \cdot \frac{\langle p - q - h x_i, g_2 \rangle}{\langle p - q - h x_i, g_3 \rangle}.$$

Berücksichtigen wir schließlich noch die radiale Verzerrung, so erhalten wir die Messgleichungen

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \left(1 + k_1 (u^2 + v^2) + k_2 (u^2 + v^2)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

3 Theorie des Schätzverfahrens

3.1 Lineare Ausgleichsrechnung

Gegeben sei eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^N$, wobei N für die Anzahl der Messungen und m für die Anzahl der zu schätzenden Parameter steht. Gesucht ist ein Vektor $x \in \mathbb{R}^m$, sodass $\|Ax - b\|$ minimal wird. Ein $x \in \mathbb{R}^m$ ist genau dann eine Lösung von $\|Ax - b\| = \min$, wenn die Normalengleichung

$$A^T Ax = A^T b$$

erfüllt ist. Das lineare Ausgleichsproblem besitzt die eindeutige Lösung $x = (A^T A)^{-1} A^T b$, wenn der Rang der Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times m}$ gleich m ist, also maximal. Um dies zu zeigen betrachten wir die folgenden zwei Herleitungen.

3.1.1 Algebraische Herleitung

Es sei wie oben eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ gegeben, wobei $m \geq n$ sei. Betrachten wir das $Bild(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^m\}$, so ist der Punkt Ax im $Bild(A)$ gesucht, der von $b \in \mathbb{R}^N$ minimalen Abstand hat. Es muss also gelten

$$Ax - b \perp Ax - v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^m.$$

Diese Bedingung gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \langle Ax - b, A(x - v) \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^m, \\ \Leftrightarrow & \langle Ax - b, Au \rangle = 0 \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^m, \\ \Leftrightarrow & \langle A^T(Ax - b), u \rangle = 0 \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun, dass $A^T(Ax - b) = 0$ sein muss, denn der einzige Vektor, der auf allen Vektoren $u \in \mathbb{R}^m$ senkrecht stehen kann, ist der Nullvektor. Hieraus ergibt sich die Normalengleichung

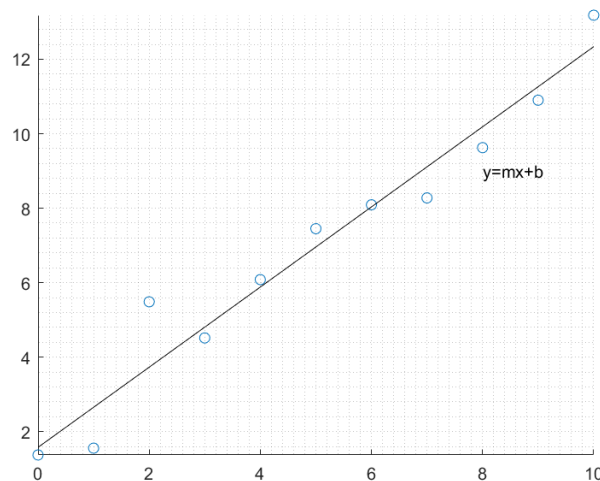
$$A^T Ax = A^T b.$$

Um diese Gleichung nach x umzustellen, muss $A^T A \in m \times m$ invertierbar sein, was genau dann der Fall ist wenn $A^T A$ vollen Rang hat, also m . Dies bedeutet gleichzeitig, dass $\text{Rang}(A) = m$ sein muss. Ist dies gegeben, so gilt

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

3.1.2 Analytische Herleitung

Beispiel 3.1.1. Gegeben seien N Punkte (x_i, y_i) mit $1 \leq i \leq N$. Gesucht ist die dazugehörige



Ausgleichsgerade, das heißt wir müssen m und b so wählen, dass

$$F(m, b) := \sum_{i=1}^N (mx_i + b - y_i)^2 = \left\| \begin{bmatrix} mx_1 + b - y_1 \\ mx_2 + b - y_2 \\ \vdots \\ mx_N + b - y_N \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \right\|^2$$

minimal wird.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die gesuchte Ausgleichsgerade ist also $y = mx + b$.

3.2 Nichtlineare Ausgleichsrechnung

Beispiel 3.2.1. Das Maltus-Modell $\dot{x}(t) = ax(t)$ besitzt die Lösung $x(t) = x_0 e^{at}$, die Parameter x_0 und a sind unbekannt. Zu insgesamt N Zeiten seien uns Populationszählungen (Messungen) $x(t_i) = x_i$ gegeben. Da die erhaltenen Messungen fehlerbehaftet sind, versuchen wir die

Parameter x_0 und a bestmöglich an die Messungen anzupassen. Dazu betrachten wir zunächst den Residuenvektor

$$\rho = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 e^{at_1} \\ x_2 - x_0 e^{at_2} \\ \vdots \\ x_N - x_0 e^{at_N} \end{bmatrix}.$$

Unter Verwendung der euklidischen Norm ist das Ziel $\|\rho\|^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - x_0 e^{at_i})^2$ zu minimieren,

dazu verwenden wir unser iteratives Verfahren.

Wir wählen eine Startschätzung $U^{(0)} := (x_0^{(0)}, a^{(0)})$ und versuchen diese iterativ zu verbessern:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \delta U \iff \begin{bmatrix} x_0^{(k+1)} \\ a^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^{(k)} + \delta x_0 \\ a^{(k)} + \delta a \end{bmatrix}$$

Daraus erhalten wir für unseren Residuenvektor

$$\begin{aligned} \rho^{(k+1)} &= \hat{\mu} - \mu(U^{(k+1)}) \\ &= \hat{\mu} - \mu(U^{(k)} + \delta U) \\ &= \hat{\mu} - \mu(U^{(k)}) - \frac{\partial \mu}{\partial U}(U^{(k)}) \delta U + \dots \\ &= \rho^{(k)} - \frac{\partial \mu}{\partial U}(U^{(k)}) \delta U + \dots \end{aligned}$$

wobei wir bei der Linearisierung Terme höherer Ordnung ignorieren. Der Vektor $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^N$ entspricht unseren tatsächlich erhaltenen und $\mu \in \mathbb{R}^N$ unseren theoretisch erwarteten Messungen.

Daraus erhalten wir das neue Minimierungsproblem $\left\| \rho^{(k)} - \frac{\partial \mu}{\partial U}(U^{(k)}) \delta U \right\|$. Dies ist

4 Schätzverfahren

Es seien uns N tatsächlich erhaltene Messwerte $\hat{\mu}$ gegeben. Zu schätzen sind $P = (P_1, P_2, \dots, P_m)$ Schätzparameter. Die Abbildung μ hängt von diesen Parametern ab und beschreibe die theoretisch erwarteten Messwerte. Der Differenzenvektor $\rho(P) := \hat{\mu} - \mu(P) \in \mathbb{R}^N$ heißt Residuenvektor. Das Ziel ist den Parametervektor P so zu wählen, dass $\hat{\mu} - \mu(P)$ möglichst klein wird. Um die gesuchten Parameter mit dem folgenden Iterationsverfahren zu schätzen, geben wir uns eine Startschätzung $P^{(0)}$ vor. Unsere neue Schätzung für P erhalten wir indem wir die Startschätzung mit δP addieren,

$$P_{neu} = P_{alt} + \delta P,$$

womit wir unsere alte Schätzung in die richtige Richtung korrigieren.

Setzen wir dies in den Residuenvektor ein, so erhalten wir durch Taylorentwicklung erster Ordnung

$$\begin{aligned} \rho(P_{neu}) &= \hat{\mu} - \mu(P_{neu}) \\ &= \hat{\mu} - \mu(P_{alt} + \delta P) \\ &\approx \hat{\mu} - \mu(P_{alt}) - \frac{\partial \mu}{\partial P}(P_{alt}) \delta P \\ &= \rho(P_{alt}) - \frac{\partial \mu}{\partial P}(P_{alt}) \delta P. \end{aligned}$$

Durch diese Linearisierung erhalten wir ein einfaches lineares Ausgleichsproblem, welches sich wesentlich leichter lösen lässt als das ursprüngliche nichtlineare Problem. Das Ziel ist nun $\|\rho(P_{alt}) - \frac{\partial \mu}{\partial P}(P_{alt})\delta P\|$ zu minimieren. Der Vektor $\rho(P_{alt}) \in \mathbb{R}^N$ und die Matrix $\frac{\partial \mu}{\partial P}(P_{alt})\delta P \in \mathbb{R}^{N \times m}$ sind bekannt. Gesucht ist der Vektor $\delta P \in \mathbb{R}^m$. Aus der linearen Ausgleichsrechnung kennen wir bereits, unter der Voraussetzung dass $\text{Rang}(A) = m$ ist, eine Lösung $x \in \mathbb{R}^m$ für das Minimierungsproblem $\|Ax - b\|$. Setzen wir nun

$$A := \frac{\partial \mu}{\partial P}(P_{alt}), \quad b := \rho_{alt}, \quad x := \delta P,$$

so erhalten wir

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\delta P = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}(P_{alt})^T \frac{\partial \mu}{\partial P}(P_{alt}) \right)^{-1} \frac{\partial \mu}{\partial P}(P_{alt})^T \rho_{alt}.$$

4.1 Berechnung partieller Ableitungen

Um die Matrix $A := \frac{\partial \mu}{\partial P}(P_{alt})$ aufzustellen, berechnen wir zunächst alle partiellen Ableitungen der unverzerrten Bildkoordinaten

$$u = -f \cdot \frac{\langle p-x, g_1 \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle} \quad \text{und} \quad v = -f \cdot \frac{\langle p-x, g_2 \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle}.$$

Die partiellen Ableitungen von u und v nach p_i , $i = 1, 2, 3$ errechnen sich nach der Quotientenregel. Die Vektoren e_i mit $i = 1, 2, 3$ bezeichnen dabei die drei Einheitsvektoren.

$$\frac{\partial u}{\partial p_i} = -f \cdot \frac{\langle e_i, g_1 \rangle \langle p-x, g_3 \rangle - \langle p-x, g_1 \rangle \langle e_i, g_3 \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} = -f \cdot \frac{\langle e_i, g_2 \rangle \langle p-x, g_3 \rangle - \langle p-x, g_2 \rangle \langle e_i, g_3 \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle^2}$$

Die Drehmatrix $g = (g_1 \mid g_2 \mid g_3)^T$ ist durch die drei Eulerwinkel α , β und γ parametrisiert. Wir drehen zunächst um die z-Achse mit Winkel α , dann um die x-Achse mit Winkel β und dann wieder um die z-Achse mit Winkel γ .

$$g = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \beta \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}$$

Somit sind g_1 , g_2 und g_3 gegeben durch

$$g_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \sin \beta \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen von u und v nach α , β und γ sind gegeben durch die folgenden Gleichungen,

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -f \cdot \frac{\langle p-x, \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} \rangle \langle p-x, g_3 \rangle - \langle p-x, g_1 \rangle \langle p-x, \frac{\partial g_3}{\partial \alpha} \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = -f \cdot \frac{\langle p-x, \frac{\partial g_1}{\partial \beta} \rangle \langle p-x, g_3 \rangle - \langle p-x, g_1 \rangle \langle p-x, \frac{\partial g_3}{\partial \beta} \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} = -f \cdot \frac{\langle p-x, \frac{\partial g_1}{\partial \gamma} \rangle \langle p-x, g_3 \rangle - \langle p-x, g_1 \rangle \langle p-x, \frac{\partial g_3}{\partial \gamma} \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = -f \cdot \frac{\langle p-x, \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} \rangle \langle p-x, g_3 \rangle - \langle p-x, g_2 \rangle \langle p-x, \frac{\partial g_3}{\partial \alpha} \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = -f \cdot \frac{\langle p-x, \frac{\partial g_2}{\partial \beta} \rangle \langle p-x, g_3 \rangle - \langle p-x, g_2 \rangle \langle p-x, \frac{\partial g_3}{\partial \beta} \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \gamma} = -f \cdot \frac{\langle p-x, \frac{\partial g_2}{\partial \gamma} \rangle \langle p-x, g_3 \rangle - \langle p-x, g_2 \rangle \langle p-x, \frac{\partial g_3}{\partial \gamma} \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle^2}.$$

In diesen kommen die inneren Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}$ vor, welche gegeben sind durch

$$\frac{\partial g_1}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \gamma} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \gamma} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \beta \sin \gamma \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial \gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zuletzt bleibt die Ableitung von u und v nach f .

$$\frac{\partial u}{\partial f} = -\frac{\langle p-x, g_1 \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle}$$

$$\frac{\partial v}{\partial f} = -\frac{\langle p-x, g_2 \rangle}{\langle p-x, g_3 \rangle}$$

Partielle Ableitungen von \bar{u} und \bar{v} mit bewegtem Brett.

$$\bar{u} = -f \cdot \frac{\langle p - q - hx, g_1 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle} \quad \text{und} \quad \bar{v} = -f \cdot \frac{\langle p - q - hx, g_2 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle}.$$

Die partiellen Ableitungen von \bar{u} und \bar{v} nach p_i , $i = 1, 2, 3$ errechnen sich nach der Quotientenregel. Die Vektoren e_i mit $i = 1, 2, 3$ bezeichnen dabei die drei Einheitsvektoren.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial p_i} = -f \cdot \frac{\langle e_i, g_1 \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_1 \rangle \langle e_i, g_3 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial p_i} = -f \cdot \frac{\langle e_i, g_2 \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_2 \rangle \langle e_i, g_3 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2}$$

Die partiellen Ableitungen von \bar{u} und \bar{v} nach α , β und γ sind gegeben durch die folgenden Gleichungen,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} = -f \cdot \frac{\langle p - q - hx, \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_1 \rangle \langle p - q - hx, \frac{\partial g_3}{\partial \alpha} \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \beta} = -f \cdot \frac{\langle p - q - hx, \frac{\partial g_1}{\partial \beta} \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_1 \rangle \langle p - q - hx, \frac{\partial g_3}{\partial \beta} \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \gamma} = -f \cdot \frac{\langle p - q - hx, \frac{\partial g_1}{\partial \gamma} \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_1 \rangle \langle p - q - hx, \frac{\partial g_3}{\partial \gamma} \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2},$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \alpha} = -f \cdot \frac{\langle p - q - hx, \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_2 \rangle \langle p - q - hx, \frac{\partial g_3}{\partial \alpha} \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2},$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta} = -f \cdot \frac{\langle p - q - hx, \frac{\partial g_2}{\partial \beta} \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_2 \rangle \langle p - q - hx, \frac{\partial g_3}{\partial \beta} \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2},$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \gamma} = -f \cdot \frac{\langle p - q - hx, \frac{\partial g_2}{\partial \gamma} \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_2 \rangle \langle p - q - hx, \frac{\partial g_3}{\partial \gamma} \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2}.$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial f} = - \frac{\langle p - q - hx, g_1 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial f} = - \frac{\langle p - q - hx, g_2 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle}$$

Die partiellen Ableitungen von \bar{u} und \bar{v} nach q_i , $i = 1, 2, 3$ errechnen sich nach der Quotientenregel. Die Vektoren e_i mit $i = 1, 2, 3$ bezeichnen dabei die drei Einheitsvektoren.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i} = - \frac{\partial \bar{u}}{\partial p_i} = f \cdot \frac{\langle e_i, g_1 \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_1 \rangle \langle e_i, g_3 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} = - \frac{\partial \bar{v}}{\partial p_i} = f \cdot \frac{\langle e_i, g_2 \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_2 \rangle \langle e_i, g_3 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2}$$

Die Drehmatrix $h = (h_1 | h_2 | h_3)^T$ ist durch die drei Eulerwinkel $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ und $\tilde{\gamma}$ parametrisiert. Somit sind h_1 , h_2 und h_3 gegeben durch

$$h = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\gamma} - \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \sin \tilde{\gamma} & -\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\gamma} - \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma} & \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta} \\ \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\gamma} + \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \sin \tilde{\gamma} & -\sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\gamma} + \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma} & -\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta} \\ \sin \tilde{\beta} \sin \tilde{\gamma} & \sin \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma} & \cos \tilde{\beta} \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen von \tilde{u} und \tilde{v} nach $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ und $\tilde{\gamma}$ sind gegeben durch die folgenden Gleichungen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\alpha}} &= -f \cdot \frac{\langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\alpha}} x, g_1 \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_1 \rangle \langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\alpha}} x, g_3 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\beta}} &= -f \cdot \frac{\langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\beta}} x, g_1 \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_1 \rangle \langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\beta}} x, g_3 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\gamma}} &= -f \cdot \frac{\langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\gamma}} x, g_1 \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_1 \rangle \langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\gamma}} x, g_3 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\alpha}} &= -f \cdot \frac{\langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\alpha}} x, g_2 \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_2 \rangle \langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\alpha}} x, g_3 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\beta}} &= -f \cdot \frac{\langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\beta}} x, g_2 \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_2 \rangle \langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\beta}} x, g_3 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\gamma}} &= -f \cdot \frac{\langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\gamma}} x, g_2 \rangle \langle p - q - hx, g_3 \rangle - \langle p - q - hx, g_2 \rangle \langle -\frac{\partial h}{\partial \tilde{\gamma}} x, g_3 \rangle}{\langle p - q - hx, g_3 \rangle^2}, \end{aligned}$$

In diesen kommen die inneren Ableitungen $\frac{\partial h}{\partial(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})}$ vor, welche gegeben sind durch

$$\frac{\partial h}{\partial \tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\gamma} - \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \sin \tilde{\gamma} & \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\gamma} - \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma} & \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta} \\ \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\gamma} - \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \sin \tilde{\gamma} & -\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\gamma} - \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma} & \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta} \sin \tilde{\gamma} & \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma} & \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \\ -\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta} \sin \tilde{\gamma} & -\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma} & -\cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \\ \cos \tilde{\beta} \sin \tilde{\gamma} & \cos \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma} & -\sin \tilde{\beta} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} -\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\gamma} - \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma} & -\cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\gamma} + \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \sin \tilde{\gamma} & 0 \\ -\sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\gamma} + \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma} & -\sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\gamma} - \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \sin \tilde{\gamma} & 0 \\ \sin \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma} & -\sin \tilde{\beta} \sin \tilde{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitung von u und v (mit Verzerrung) **Rest fehlt noch**

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial k_1} = -\frac{1}{2} u \left(1 + k_1 (u^2 + v^2) + k_2 (u^2 + v^2)^2 \right)^{-3/2} (u^2 + v^2)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial k_1} = -\frac{1}{2} v \left(1 + k_1 (u^2 + v^2) + k_2 (u^2 + v^2)^2 \right)^{-3/2} (u^2 + v^2)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial k_2} = -\frac{1}{2} u \left(1 + k_1 (u^2 + v^2) + k_2 (u^2 + v^2)^2 \right)^{-3/2} (u^2 + v^2)^2$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial k_2} = -\frac{1}{2} v \left(1 + k_1 (u^2 + v^2) + k_2 (u^2 + v^2)^2 \right)^{-3/2} (u^2 + v^2)^2$$

5 Matlab Programme

5.1 Schätzprogramm

```
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 % Parameterschaetzung Kamera 1
3 % Bild 1 (Referenzstellung des Brettes)
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5
6 clear; clc; close; format long;
7
8 % Messdaten x in Weltkoordinaten mit Ursprung im ersten Punkt
9 % xx = [xi_i; eta_i; 0] (Abmessung in cm)
10 for j = 0:3:27
11     x0 = vertcat(0:3:36, j*ones(1,13), zeros(1,13));
12     if j==3
13         xx = horzcat(x1,x0);
14     elseif j>3
15         xx = horzcat(xx,x0);
16     end
17     x1 = x0;
18 end
19
20 % Messdaten einlesen (u-,v-Koordinaten) und abspeichern in messungen
21 % pfad = 'C:\Users\Lilija\Documents\FH\5. Semester\AWP\HSRM_Calib\';
22 % filename = '20160524_132210\cam01\1001.csv';
23 %
24 % messungen = csvread([pfad filename],1,0);
25 %
26 %% Umrechnung von Pixel in Zentimeter
27 % messungen = 0.00028 * messungen;
28 %
29 %% Zusammenfassen von u und v zu einem Vektor (u; v)
30 % messung = vertcat(messungen(:,1),messungen(:,2));
31
32 % Einlesen der simulierten Messungen
33 input = fopen('sim_messungen.txt');
34 messungen = textscan(input, '%f %f %f %f');
35
```

```

36 % Zusammenfassen von (u,v,uu,vv) zu einer Matrix
37 messungen = horzcat(messungen{: ,1},messungen{: ,2}, ...
38                   messungen{: ,3},messungen{: ,4});
39 fclose(input)
40
41 % Zusammenfassen von (u,v,uu,vv) zu einem Vektor
42 messung = vertcat(messungen{: ,1},messungen{: ,2}, ...
43                  messungen{: ,3},messungen{: ,4});
44
45 % Anfangsschaetzung
46 % p1, p2, p3, alpha, beta, gamma, f
47 p1 = 0; % in cm
48 p2 = 0;
49 p3 = 116;
50 g = [cos(pi/9), 0, sin(pi/9); 0, 1, 0; -sin(pi/9), 0, cos(pi/9)];
51
52 a = cart2pol(-g(2,3),g(1,3)); % im Bogenmass
53 b = acos(g(3,3));
54 c = cart2pol(g(3,2),g(3,1));
55 f = 0.6; % in cm
56
57 % Anfangsschaetzung zweites Brett
58 q = [100; 0; 0];
59 h = [cos(pi/4), 0, sin(pi/4); 0, 1, 0; -sin(pi/4), 0, cos(pi/4)];
60
61 aa = cart2pol(-h(2,3),h(1,3));
62 bb = acos(h(3,3));
63 cc = cart2pol(h(3,2),h(3,1));
64
65 % parameter = [p1; p2; p3; alpha; beta; gamma; f];
66 parameter = [p1; p2; p3; a; b; c; f; q; aa; bb; cc];
67
68 % Iterationsschleife
69
70 % delta = 1;
71 % while norm(delta)>10^(-3)
72 g1 = [cos(a)*cos(c)-sin(a)*cos(b)*sin(c);
73       sin(a)*cos(c)+cos(a)*cos(b)*sin(c);
74       sin(b)*sin(c)];
75 g2 = [-cos(a)*sin(c)-sin(a)*cos(b)*cos(c);
76       -sin(a)*sin(c)+cos(a)*cos(b)*cos(c);
77       sin(b)*cos(c)];
78 g3 = [sin(a)*sin(b); -cos(a)*sin(b); cos(b)];
79
80 h = [cos(a)*cos(c)-sin(a)*cos(b)*sin(c), ...
81      -cos(a)*sin(c)-sin(a)*cos(b)*cos(c), ...
82      sin(a)*sin(b);
83      sin(a)*cos(c)+cos(a)*cos(b)*sin(c), ...
84      -sin(a)*sin(c)+cos(a)*cos(b)*cos(c), ...
85      -cos(a)*sin(b);
86      sin(b)*sin(c), sin(b)*cos(c), cos(b)];
87

```

```

88 % Partielle Ableitungen nach alpha , beta , gamma
89 % von g1
90 dg1_da = [-sin(a)*cos(c)-cos(a)*cos(b)*sin(c);
91           cos(a)*cos(c)-sin(a)*cos(b)*sin(c);
92           0];
93 dg1_db = [ sin(a)*sin(b)*sin(c);
94           -cos(a)*sin(b)*sin(c);
95           cos(b)*sin(c)];
96 dg1_dc = [-cos(a)*sin(c)-sin(a)*cos(b)*cos(c);
97           -sin(a)*sin(c)+cos(a)*cos(b)*cos(c);
98           sin(b)*cos(c)];
99
100 % von g2
101 dg2_da = [ sin(a)*sin(c)-cos(a)*cos(b)*cos(c);
102           -cos(a)*sin(c)-sin(a)*cos(b)*cos(c);
103           0];
104 dg2_db = [ sin(a)*sin(b)*cos(c);
105           -cos(a)*sin(b)*cos(c);
106           cos(b)*cos(c)];
107 dg2_dc = [-cos(a)*cos(c)+sin(a)*cos(b)*sin(c);
108           -sin(a)*cos(c)-cos(a)*cos(b)*sin(c);
109           -sin(b)*sin(c)];
110
111 % von g3
112 dg3_da = [cos(a)*sin(b); sin(a)*sin(b); 0];
113 dg3_db = [ sin(a)*cos(b); -cos(a)*cos(b); -sin(b)];
114 dg3_dc = [0; 0; 0];
115
116 % Partielle Ableitungen von h nach aa, bb, cc
117 dh_daa = [-sin(aa)*cos(cc)-cos(aa)*cos(bb)*sin(cc), ...
118           sin(aa)*sin(cc)-cos(aa)*cos(bb)*cos(cc), ...
119           cos(aa)*sin(bb);
120           cos(aa)*cos(cc)-sin(aa)*cos(bb)*sin(cc), ...
121           -cos(aa)*sin(cc)-sin(aa)*cos(bb)*cos(cc), ...
122           sin(aa)*sin(bb);
123           0, 0, 0];
124 dh_dbb = [ sin(aa)*sin(bb)*sin(cc), ...
125           sin(aa)*sin(bb)*cos(cc), ...
126           sin(aa)*cos(bb);
127           -cos(aa)*sin(bb)*sin(cc), ...
128           -cos(aa)*sin(bb)*cos(cc), ...
129           -cos(aa)*cos(bb);
130           cos(bb)*sin(cc), cos(bb)*cos(cc), -sin(bb)];
131 dh_dcc = [-cos(aa)*sin(cc)-sin(aa)*cos(bb)*cos(cc), ...
132           -cos(aa)*cos(cc)+sin(aa)*cos(bb)*sin(cc), 0;
133           -sin(aa)*sin(cc)+cos(aa)*sin(bb)*cos(cc), ...
134           -sin(aa)*cos(cc)-cos(aa)*cos(bb)*sin(cc), 0;
135           sin(bb)*cos(cc), -sin(bb)*sin(cc), 0];
136
137 p = [p1; p2; p3];
138
139 for k = 1:size(xx,2)

```

```

140     x = xx(:,k);
141     nenner = (p-x)'*g3;
142     d = p-q-h*x;
143     nenner2= d'*g3;
144
145     % Messgleichungen u und v
146     u(k,:) = -f*( ((p-x)'*g1) / nenner );
147     v(k,:) = -f*( ((p-x)'*g2) / nenner );
148
149     % Messgleichungen uu und vv
150     uu(k,:)= -f*( ((p-q-h*x)'*g1) / nenner2);
151     vv(k,:)= -f*( ((p-q-h*x)'*g2) / nenner2 );
152
153     % Partielle Ableitungen von u und v
154     e1 = [1; 0; 0];    e2 = [0; 1; 0];    e3 = [0; 0; 1];
155
156     du_dp1 = -f*((e1'*g1)*nenner - ((p-x)'*g1)*(e1'*g3)) ...
157              / nenner^2);
158     du_dp2 = -f*((e2'*g1)*nenner - ((p-x)'*g1)*(e2'*g3)) ...
159              / nenner^2);
160     du_dp3 = -f*((e3'*g1)*nenner - ((p-x)'*g1)*(e3'*g3)) ...
161              / nenner^2);
162     du_da  = -f*( (((p-x)'*dg1_da)*nenner - ((p-x)'*g1) ...
163                  *((p-x)'*dg3_da)) / nenner^2);
164     du_db  = -f*( (((p-x)'*dg1_db)*nenner - ((p-x)'*g1) ...
165                  *((p-x)'*dg3_db)) / nenner^2);
166     du_dc  = -f*( (((p-x)'*dg1_dc)*nenner - ((p-x)'*g1) ...
167                  *((p-x)'*dg3_dc)) / nenner^2);
168     du_df  = -((p-x)'*g1) / nenner;
169
170
171     dv_dp1 = -f*((e1'*g2)*nenner - ((p-x)'*g2)*(e1'*g3)) ...
172              / nenner^2);
173     dv_dp2 = -f*((e2'*g2)*nenner - ((p-x)'*g2)*(e2'*g3)) ...
174              / nenner^2);
175     dv_dp3 = -f*((e3'*g2)*nenner - ((p-x)'*g2)*(e3'*g3)) ...
176              / nenner^2);
177     dv_da  = -f*( (((p-x)'*dg2_da)*nenner - ((p-x)'*g2) ...
178                  *((p-x)'*dg3_da)) / nenner^2 );
179     dv_db  = -f*( (((p-x)'*dg2_db)*nenner - ((p-x)'*g2) ...
180                  *((p-x)'*dg3_db)) / nenner^2 );
181     dv_dc  = -f*( (((p-x)'*dg2_dc)*nenner - ((p-x)'*g2) ...
182                  *((p-x)'*dg3_dc)) / nenner^2 );
183     dv_df  = -((p-x)'*g2) / nenner;
184
185     % Partielle Ableitungen von uu und vv (zweites Brett)
186
187     duu_dp1 = -f*( ((e1'*g1)*nenner2 - (d'*g1)*(e1'*g3)) ...
188                  / nenner2^2);
189     duu_dp2 = -f*( ((e2'*g1)*nenner2 - (d'*g1)*(e2'*g3)) ...
190                  / nenner2^2);
191     duu_dp3 = -f*( ((e3'*g1)*nenner2 - (d'*g1)*(e3'*g3)) ...

```

```

192         / nenner2^2);
193 duu_da = -f * (((d' * dg1_da) * nenner2 - (d' * g1) * (d' * dg3_da)) ...
194         / nenner2^2);
195 duu_db = -f * (((d' * dg1_db) * nenner2 - (d' * g1) * (d' * dg3_db)) ...
196         / nenner2^2);
197 duu_dc = -f * (((d' * dg1_dc) * nenner2 - (d' * g1) * (d' * dg3_dc)) ...
198         / nenner2^2);
199 duu_df = -(d' * g1) / nenner2;
200 duu_dq1 = -duu_dp1;
201 duu_dq2 = -duu_dp2;
202 duu_dq3 = -duu_dp3;
203 duu_daa = -f * (((-dh_daa*x)' * g1) * nenner2 - (d' * g1) ...
204         * (-dh_daa*x)' * g3) / nenner2^2;
205 duu_dbb = -f * (((-dh_dbb*x)' * g1) * nenner2 - (d' * g1) ...
206         * (-dh_dcc*x)' * g3) / nenner2^2;
207 duu_dcc = -f * (((-dh_daa*x)' * g1) * nenner2 - (d' * g1) ...
208         * (-dh_dcc*x)' * g3) / nenner2^2;
209
210
211 dvv_dp1 = -f * (((e1' * g2) * nenner2 - (d' * g2) * (e1' * g3)) ...
212         / nenner2^2);
213 dvv_dp2 = -f * (((e2' * g2) * nenner2 - (d' * g2) * (e2' * g3)) ...
214         / nenner2^2);
215 dvv_dp3 = -f * (((e3' * g2) * nenner2 - (d' * g2) * (e3' * g3)) ...
216         / nenner2^2);
217 dvv_da = -f * (((d' * dg2_da) * nenner2 - (d' * g2) * (d' * dg3_da)) ...
218         / nenner2^2 );
219 dvv_db = -f * (((d' * dg2_db) * nenner2 - (d' * g2) * (d' * dg3_db)) ...
220         / nenner2^2 );
221 dvv_dc = -f * (((d' * dg2_dc) * nenner2 - (d' * g2) * (d' * dg3_dc)) ...
222         / nenner2^2 );
223 dvv_df = -(d' * g2) / nenner2;
224 dvv_dq1 = -dvv_dp1;
225 dvv_dq2 = -dvv_dp2;
226 dvv_dq3 = -dvv_dp3;
227 dvv_daa = -f * (((-dh_daa*x)' * g2) * nenner2 - (d' * g2) ...
228         * (-dh_daa*x)' * g3) / nenner2^2;
229 dvv_dbb = -f * (((-dh_dbb*x)' * g2) * nenner2 - (d' * g2) ...
230         * (-dh_dcc*x)' * g3) / nenner2^2;
231 dvv_dcc = -f * (((-dh_daa*x)' * g2) * nenner2 - (d' * g2) ...
232         * (-dh_dcc*x)' * g3) / nenner2^2;
233
234
235
236 % Zeilen der Matrix A0
237 % mit partiellen Ableitungen von u und v
238 col1u = du_dp1;
239 col2u = du_dp2;
240 col3u = du_dp3;
241 col4u = du_da;
242 col5u = du_db;
243 col6u = du_dc;

```

```

244     col7u = du_df;
245
246     A0u(k,:) = [col1u col2u col3u col4u col5u col6u col7u];
247
248     col1v = dv_dp1;
249     col2v = dv_dp2;
250     col3v = dv_dp3;
251     col4v = dv_da;
252     col5v = dv_db;
253     col6v = dv_dc;
254     col7v = dv_df;
255
256     A0v(k,:) = [col1v col2v col3v col4v col5v col6v col7v];
257
258     % Zeilen der Matrix A1
259     col1uu = duu_dp1;
260     col2uu = duu_dp2;
261     col3uu = duu_dp3;
262     col4uu = duu_da;
263     col5uu = duu_db;
264     col6uu = duu_dc;
265     col7uu = duu_df;
266
267     A1uu(k,:)=[col1uu col2uu col3uu col4uu col5uu col6uu col7uu];
268
269     col1vv = dvv_dp1;
270     col2vv = dvv_dp2;
271     col3vv = dvv_dp3;
272     col4vv = dvv_da;
273     col5vv = dvv_db;
274     col6vv = dvv_dc;
275     col7vv = dvv_df;
276
277     A1vv(k,:)=[col1vv col2vv col3vv col4vv col5vv col6vv col7vv];
278
279     % Zeilen der Matrix B1
280     col1uu = duu_dq1;
281     col2uu = duu_dq2;
282     col3uu = duu_dq3;
283     col4uu = duu_daa;
284     col5uu = duu_dbb;
285     col6uu = duu_dcc;
286
287     B1uu(k,:) = [col1uu col2uu col3uu col4uu col5uu col6uu];
288
289     col1vv = dvv_dq1;
290     col2vv = dvv_dq2;
291     col3vv = dvv_dq3;
292     col4vv = dvv_daa;
293     col5vv = dvv_dbb;
294     col6vv = dvv_dcc;
295

```

```

296         B1vv(k,:) = [col1vv col2vv col3vv col4vv col5vv col6vv];
297
298     end
299
300     % Vektor mit den theoretisch erwarteten Messwerten u,v,uu,vv
301     theoretisch = vertcat(u, v, uu, vv);
302
303     %Residuenvektor: Messungen – theoretisch erwartete Messwerte
304     rho = messung - theoretisch;
305
306     % Matrix A mit den partiellen Ableitungen von u und v
307     A0 = vertcat(A0u ,A0v);           % (vertikal u|v)
308     A1 = vertcat(A1uu,A1vv);
309     B1 = vertcat(B1uu,B1vv);
310
311     A = vertcat(horzcat(A0,zeros(size(B1))), horzcat(A1,B1));
312
313     % Iterationsschritt
314     P = A0'*A0 + A1'*A1;
315     C = A1'*B1;
316     D = B1'*B1;
317
318     delta = inv(A'*A) * A' * rho;
319
320
321     % Bestimmung der neuen Schaetzung
322     parameter_neu = parameter + delta;
323     parameter = parameter_neu;
324
325     p1 = parameter(1);
326     p2 = parameter(2);
327     p3 = parameter(3);
328     a = parameter(4);
329     b = parameter(5);
330     c = parameter(6);
331     f = parameter(7);
332     q1 = parameter(8);
333     q2 = parameter(9);
334     q3 = parameter(10);
335     aa = parameter(11);
336     bb = parameter(12);
337     cc = parameter(13);
338
339     % %Plot der theoretische erwarteten Messwerte
340     % plot(u,v,'o')
341     % hold on
342     % plot(messungen(:,1),messungen(:,2),'ro')
343     %
344     % set(gca,'XAxisLocation','top')
345     % set(gca,'YDir','Reverse')
346     %
347     % grid on

```



```
348 %      axis([0 1280*0.00028 0 1024*0.00028])
349 %
350 % end
351 B = A' * A;
352 eigenwerte = eig(B)
```

6 Internetverzeichnis

<http://www.elmar-baumann.de/fotografie/techtutorial/objektiv-2.html> <http://www.mi.hs-rm.de/schwan/Projects/CG/CarreraCV/doku/intrinsisch/intrinsisch.html>