Hochschule RheinMain

Hausarbeit AWP 1 WS16/17

San Lee

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabenstellung des AWPs

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator. Das ist ein schwingungsfähiges System, das sich durch eine lineare Rückstellgröße auszeichnet.

Der besteht aus einem an der Wand festgeschraubten Feder und einer kugelförmigen Masse.

Und meine AWP Thema ist eine Verfahren zu finden, die sich den schwingenden harmonischen Oszillator schnell wie möglich an der Ruhelage bringen lässt.

Es gibt allerdings zwei Bemerkungen, die man achten soll:

Zum erstens besteht diese Verfahren nur aus ´die kugelförmige Masse ziehen´ oder ´die kugelförmige Masse schieben´ und diese Verfahren kann man als eine Funktion u(t) darstellen.

Und man bezeichnet u(t) als Steuerungsfunktion.

Zum zweitens ist die Kraft beschränkt, die man beim Ziehen oder Schieben benötigt.
(d.h. $|u(t)| \leq C \in R$)

Mathematisch lässt sich der harmonische Oszillator mit u(t) durch die folgende Differenzialgleichung beschreiben:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + w^2y(t) = Ku(t)$$

Also wir haben ein Anfangswertproblem:

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \qquad \text{mit } x(t_0) = x_0$$

Und ich werde dieses Problem mit dem pontrjaginschen Maximumprinzip lösen.

2. Pontrjaginsches Maximumprinzip

Wir haben ein Steuerungsproblem:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \in R^n$$

mit $f \in C^1$.

Wir geben uns die folgenden Daten vor:

- Ein festes Zeitintervall $[t_0, t_1]$, einen festen Anfangszustand x_0 und einen festen Zielzustand x_1.
- Einen Vektorraum U messbarer Funktionen u : $[t_0, t_1] \to R^m$.
- U ist eine abgeschlossene Teilmenge von R^m.
- Ein Kostenfunktional, das mit einer Funktion L ∈ C^1 die folgende Form hat:
  J[u] = $\int_{t_0}^{t_1} L(t, x_u(t), u(t))\, dt$

Und wir definieren die Hamilton-Funktion

H : $[t_0, t_1]$ x R^n x U x R^n x R → R

werde definiert durch

H(t,x,u,p, p_0) := <p,f(t,x,u)> + $p_0 \cdot$ L(t,x,u)

Eine Steuerung u ∈ U heißt zulässig, wenn u(t) ∈ U für alle t ∈ $[t_0, t_1]$ und $x_u(t_0)$ = x_0 und $x_u(t_1)$ = x_1 gilt.

Und u_* heißt optimal, wenn J[u_*] ≤ J[u] für alle zulässigen Steuerungen u gilt.

Ist x_{u_*} die aus der Steuerung u_* resultierende optimale Systemtrajektorie, dann gibt es eine Funktion p_*: $[t_0, t_1] \to R^n$ und eine Konstante p_{0_*} ≤ 0 derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Nichttrivialität:
  $(p_{0_*}, p_*(t))$ ≠ (0,0) für alle t ∈ $[t_0, t_1]$
- Systemgleichung:
  $$\dot{x}_*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x_*(t), u_*(t), p_*(t), p_{0_*})$$
- adjungierte Gleichung:
  $$\dot{p}_*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x_*(t), u_*(t), p_*(t), p_{0_*})$$
- Maximumsbediungung:
  $$H(t, x_*(t), u_*(t), p_*(t), p_{0_*}) = \max H(t, x_*(t), u_*(t), p_*(t), p_{0_*})$$
  $f$ür $jedes\ u$ ∈ U und für jedes t ∈ $[t_0, t_1]$

2. Pontrjaginsches Maximumprinzip

Man bezeichnet die Gleichungen:

$$\dot{\mathrm{p}}(\mathrm{t}) = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad , \qquad \dot{\mathrm{x}}(\mathrm{t}) = \frac{\partial H}{\partial p}$$

als hamiltonsche Gleichungen.

Und die Hamiltonfunktion ist linear in (p, p_0).

Das bedeutet, dass keine der im Pontrjaginsche Maximumprinzip auftretenden Bedingungen durch eine Skalierung (p, p_0) → (cp, cp_0) mit c > 0 beeinflusst.

Ist $p_0 \neq 0$, so dürfen wir $p_0 = -1$ oder $p_0 = 1$ annehmen.

3. Lösung AWP

Also wie wir schon betrachtet haben, haben wir eine Differenzialgleichung der Form:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + w^2y(t) = Ku(t)$$

(o.B.d.A. K > 0 und |u(t)| < 1)

Wenn wir $y_1(t) = y(t)\ und\ y_2(t) = \dot{y}(t)$ substituieren, haben wir eine Gleichung:

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1(t)\\ \dot{y}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -w^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ Ku(t)\end{bmatrix}.$$

Und da wir eine einfache Gleichung haben möchten, versuchen wir nochmal Substitution mit:

$$x_1(t) = \frac{w}{K}y_1(t), \quad x_2(t) = \frac{1}{K}y_2(t)$$

Dann erhalten wir:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & w\\ -w & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ u(t)\end{bmatrix}$$

Die Hamilton-Funktion liefert die Gleichung zu:

$$H = <\begin{bmatrix}p_1(t)\\ p_2(t)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & w\\ -w & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ u(t)\end{bmatrix}> + 1 \cdot L(t,x,u)$$

Und da wir Zeit minimieren wollen, haben wir J[u] = T = $\int_0^T 1\,dt$ also L = 1.

Das heißt:

$$H = w\,x_2(t)p_1(t) - w\,x_1(t)p_2(t) + u(t)p_2(t) + 1$$

Offensichtlich ist H minimum, wenn wir u(t) = -sign{$p_2(t)$} wählen.

Und nach der hamiltonischen Gleichung gilt:

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = w\,p_2(t)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -w\,p_1(t)$$

Das kann man so zusammenfassen:

$$\begin{bmatrix}\dot{p}_1(t)\\ \dot{p}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & w\\ -w & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1(t)\\ p_2(t)\end{bmatrix}$$

3. Lösung AWP

Mit $p_1(0) = \pi_1$, $p_2(0) = \pi_2$ erhalten wir:

$$p_2 = c \ \sin(wt + a)$$

Da Sinus eine periodische Funktion ist, ist die Zeit, in der p_2 positiv ist, und die Zeit, in der p_2 negativ ist, sind gleich lang. Aber wir wissen leider nicht, ob p_2 positiv oder negativ anfängt und wann genau die schwingende Masse in seiner Ruhelage erreicht. Und das erste Zeitintervall von p_2 hängt von dem Situation ab.

Aus diesem Grund ist es klar, dass erste und letzte Zeitintervalls $\leq \frac{\pi}{w}$ sind und die Reste genau $\frac{\pi}{w}$ ist.

Wir schreiben nun: $\mu_1 = x_1(0)$, $\mu_2 = x_2(0)$

Dann ist Lösung der Gleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix}$$

gleich (mit $\Delta = \mp 1$)*:*

$$x_1(t) = \left(\mu_1 - \frac{\Delta}{w}\right) \cos wt + \mu_2 \sin \mathrm{wt} + \frac{\Delta}{\mathrm{w}}$$

und $$x_2(t) = -\left(\mu_1 - \frac{\Delta}{w}\right) \sin wt + \mu_2 \cos \mathrm{wt}$$

Multiplikation mit w liefern die Gleichungen:

$$wx_1(t) = (\mathrm{w}\mu_1 - \Delta) \cos wt + \mathrm{w}\mu_2 \sin \mathrm{wt} + \Delta$$

$$wx_2(t) = -(\mathrm{w}\mu_1 - \Delta) \sin wt + \mathrm{w}\mu_2 \cos \mathrm{wt}$$

Wir formulieren jetzt die Gleichung um:

$$wx_1(t) = (\mathrm{w}\mu_1 - \Delta) \cos wt + \mathrm{w}\mu_2 \sin \mathrm{wt} + \Delta \sim wx_1(t) - \Delta = (\mathrm{w}\mu_1 - \Delta) \cos wt + \mathrm{w}\mu_2 \sin \mathrm{wt}$$
$$\sim [wx_1(t) - \Delta]^2 = [(\mathrm{w}\mu_1 - \Delta) \cos wt + \mathrm{w}\mu_2 \sin \mathrm{wt}]^2$$

Und

$$wx_2(t) = -(\mathrm{w}\mu_1 - \Delta) \sin wt + \mathrm{w}\mu_2 \cos \mathrm{wt} \sim [wx_2(t)]^2 = [-\left(\mu_1 - \frac{\Delta}{w}\right) \sin wt + \mu_2 \cos \mathrm{wt}]^2$$

Daraus folgt:

$$[wx_1(t) - \Delta]^2 + [wx_2(t)]^2 = (\mathrm{w}\mu_1 - \Delta)^2 + (\mathrm{w}\mu_2)^2$$

3. Lösung AWP

Diese Gleichung ist für $\Delta = -1$ *eine Kreisgleichung von* $wx_1 - wx_2$ *Koordinatensystem.*

Wobei (1,0) {d.h. $wx_1 = 1$ und $wx_2 = 0\}$ *ihr Mittelpunkt ist und* $\sqrt{((\mathrm{w}\mu_1 + 1)^2 + (\mathrm{w}\mu_2)^2)}$ *ihre Radius ist.*

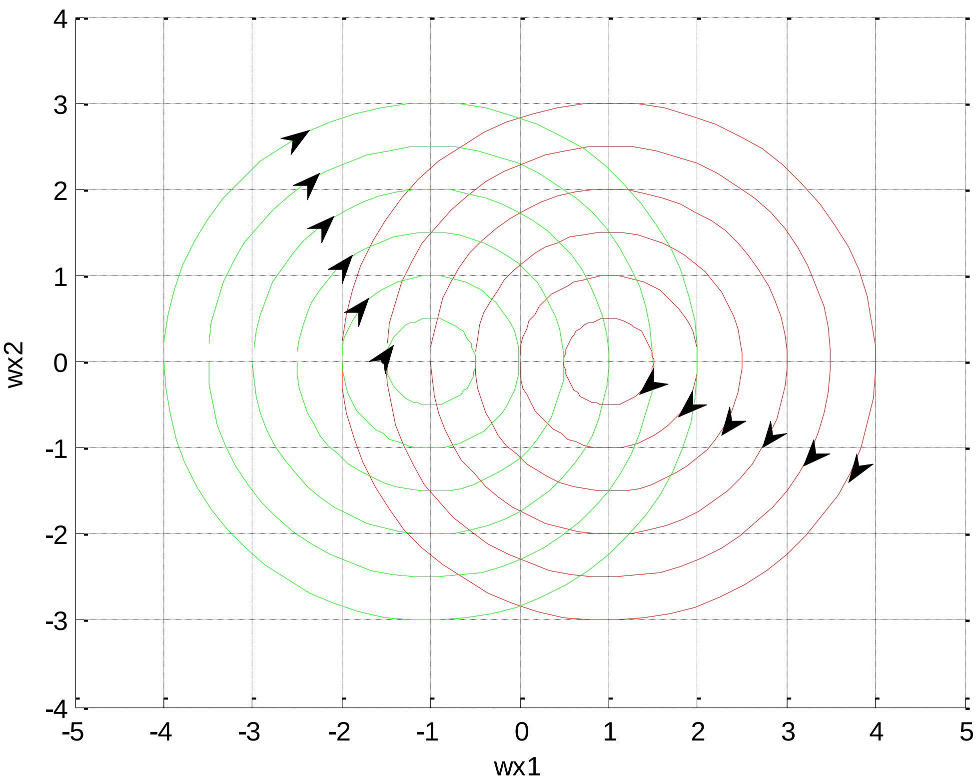
Und für $\Delta = +1$ *ist diese Gleichung auch eine Kreisgleichung von* $wx_1 - wx_2$ *Koordinatensystem.*

Wobei dieses Mal (-1,0) {d.h. $wx_1 = 1$ und $wx_2 = 0\}$ *ihr Mittelpunkt ist und* $\sqrt{((\mathrm{w}\mu_1 - 1)^2 + (\mathrm{w}\mu_2)^2)}$ *ihre Radius ist.*

Zur Erinnerung: Unsere Ziel war eigentlich ein schwingender harmonischer Oszillator mit Ziehen oder Schieben dessen Masse in der Ruhelage zu bringen.

Das bedeutet lediglich, dass ein Startpunkt mit gegebener $\mu_1 und\ \mu_2$ *Drehung um (1,0) für* $\Delta = -1$ *und um (-1,0) für* $\Delta = +1$ *mit beschränkter Zeitintervall zu (0,0) von* $wx_1 - wx_2$ *Koordinatensystem zu erreichen hat.*

Das ist der Graph mit beliebigem Radius.



3. Lösung AWP

Bevor wir für allgemeinen Startpunkt also für beliebige $\mu_1 und\ \mu_2$ *eine Verfahren für unsere AWP finden, betrachten wir nur Spezialfälle mit Radius =* $\sqrt{((w\mu_1 - \Delta)^2 + (w\mu_2)^2)}$ *= 1.*

Unser Ziel ist jetzt die Menge zu finden, die ohne Steuerungswechselung in $\leq \frac{\pi}{w}$ *Zeit zu dem Punkt (0,0) von wx1-wx2 Koordinatensystem landen.*

Und ich behaupte, dass die obere Spezialfälle mit Radius = 1 eine notwendige Bedingung ist.

Wir betrachten eine Gleichung:

$$\begin{pmatrix} r\ \sin wt \\ r\cos wt + \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die erste Gleichung liefert für t $\leq \frac{\pi}{w}$*:*

$$t = \frac{\sin^{-1}(0)}{w} = 0$$

Für $\Delta = +1$ *gilt:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r\cos(0) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und zweite Gleichung liefert:

$$\mathrm{r}\cos(0) + 1 = 0 \sim r = -1$$

Da r eine positive Zahl ist, gilt -1 nicht als zulässige Lösung für r.

Für $\Delta = -1$ *gilt:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r\cos(0) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Lösung AWP

Daraus folgt in diesem Fall:

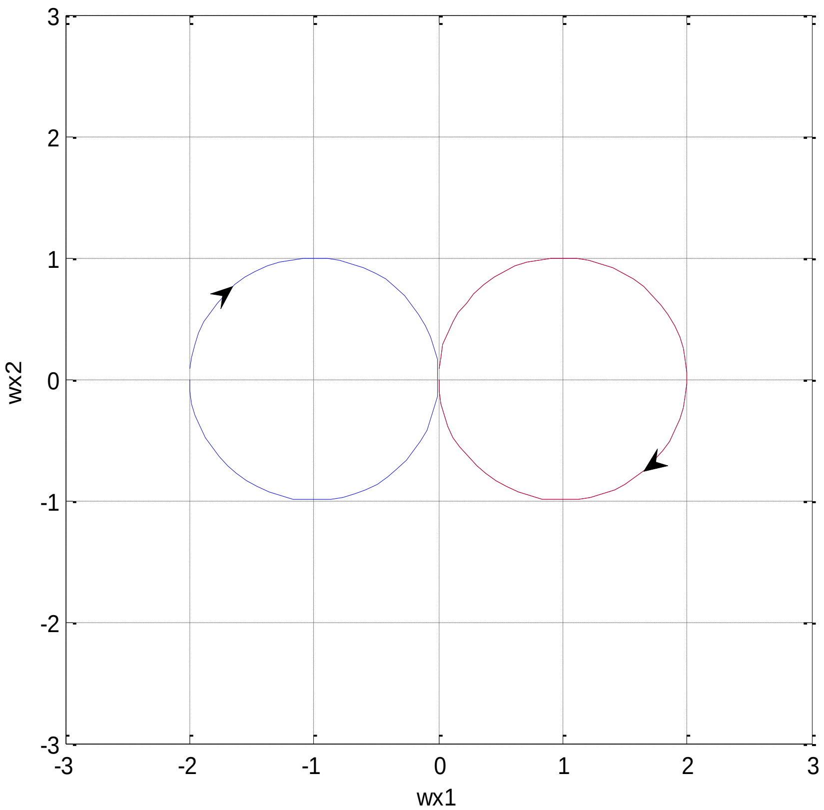
$$\mathrm{r}\cos(0) - 1 = 0 \sim r = +1$$

Diese Gleichung zeigt uns, dass Radius 1 sein muss, um ohne Steuerungswechselung in (0,0) Punkt von wx1-wx2 Koordinatensystem zu landen.

Ich definiere jetzt zwei Mengen:

$$\tau_+ := \{(wx_1, wx_2) : (wx_1 - 1)^2 + (wx_2)^2 = 1\}$$

$$\tau_- := \{(wx_1, wx_2) : (wx_1 + 1)^2 + (wx_2)^2 = 1\}$$



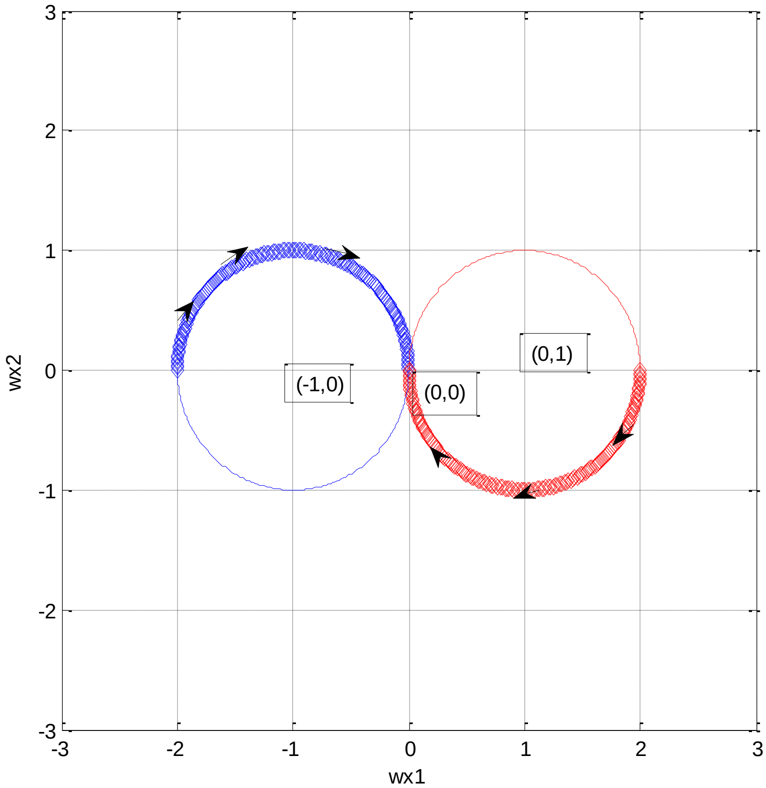
So sieht der Graph von dieser Menge $\tau_+ \cup \tau_-$ *aus.*

3. Lösung AWP

Wir betrachten jetzt andere Menge aber eine Teilmenge von der Menge $\tau_+ \cup \tau_-$.

$$\gamma_+^0 := \{(wx_1, wx_2) : (wx_1 - 1)^2 + (wx_2)^2 = 1; wx_2 < 0\} \subset \tau_+$$

$$\gamma_-^0 := \{(wx_1, wx_2) : (wx_1 + 1)^2 + (wx_2)^2 = 1; wx_2 > 0\} \subset \tau_-$$



Die dick markierten zwei Halbkreise sind die Menge γ_+^0 und γ_-^0.

Das ist ja klar, dass die Menge $\gamma_+^0 \cup \gamma_-^0$ genau die Menge ist , die wir suchen, denn die restliche dünn gezeichnete Menge mehr als $\frac{\pi}{w}$ Zeit benötigt.

Wir sind jetzt bereit für ein Lemma anzuschauen:

Lemma 1-a:

Gegeben sei die Menge $(wx_1, wx_2) \in \gamma_+^0 \cup \gamma_-^0$; Dann ist optimale Steuerung u_* ist fest für $u_* = +1\ für\ alle\ (wx_1, wx_2) \in \gamma_+^0$ und $u_* = -1\ für\ alle\ (wx_1, wx_2) \in \gamma_-^0$.

3. Lösung AWP

Beweis:

Wir wissen schon, dass $u_* = +1 \; f\text{ür} \; alle \; (wx_1, wx_2) \in \gamma_+^0$ *und* $u_* = -1 \; f\text{ür} \; alle \; (wx_1, wx_2) \in \gamma_-^0$. *In* $\leq \frac{\pi}{w}$ *Zeit in (0,0) landet.*

Was noch zu prüfen ist, ob die optimale Steuerung mit Wechselung in $\leq \frac{\pi}{w}$ *Zeit zu (0,0) gelingen kann.*

Wir können aber schon feststellen, dass die optimale Steuerung nicht mehr als zweimal gewechselt wird, weil unsere optimale Steuerung außer dem ersten und letzten Zeitintervall immer das bestimmte Intervall $\frac{\pi}{w}$ *besitzt. Wie wir schon gesehen haben.*

Was ist dann mit nur einer Wechselung?

Auf dieser Frage kann man mit der Rechnung leicht beantworten, die wir vorher gerechnet haben.

Eine Drehung um (0,1) $f\text{ür} \; (wx_1, wx_2) \in \gamma_-^0$ *bedeutet, dass unsere Punkt von* $\tau_+ \cup \tau_-$ *verlässt.*

Sonst gehörte γ_-^0 *zu* τ_+*, was nicht sein kann. Und wir haben noch eine Drehung zur Verfügung. Wir haben aber schon gerechnet, dass die Menge, welche ohne einzige Steuerungswechselung schon zu (0,0) landen, notwendigerweise zu* $\tau_+ \cup \tau_-$ *gehören müssen. Daher hilft diese letzte Drehung doch wohl kaum.*

Bei $u_* = -1 \; f\text{ür} \; (wx_1, wx_2) \in \gamma_+^0$ *kann man genauso argumentieren aber dann mit* τ_- *statt* τ_+.

Daher gilt unsere Behauptung. ■

3. Lösung AWP

Wir betrachten uns noch folgende Definitionen:

Definition:
Wir definieren R_-^1 als eine Menge, die mit $u = -1$ also mit einer Drehung um (0,1) ohne Steuerungswechselung nicht mehr als $\frac{\pi}{w}$ Zeit zu γ_+^0 landen.

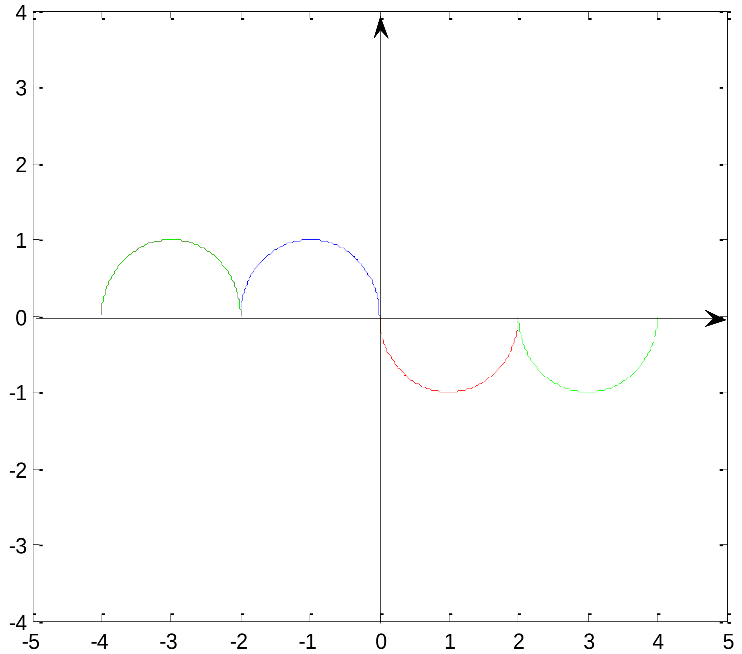
Definition:
Wir definieren R_+^1 als eine Menge, die mit $u = +1$ also mit einer Drehung um (0,-1) ohne Steuerungswechselung nicht mehr als $\frac{\pi}{w}$ Zeit zu γ_-^0 landen.

Definition:
Wir definieren γ_-^1 = { $(wx_1, wx_2) : (wx_1 + 3)^2 + (wx_2)^2 = 1;\ wx_2 > 0\}$

Definition:
Wir definieren γ_+^1 = { $(wx_1, wx_2) : (wx_1 - 3)^2 + (wx_2)^2 = 1;\ wx_2 < 0\}$

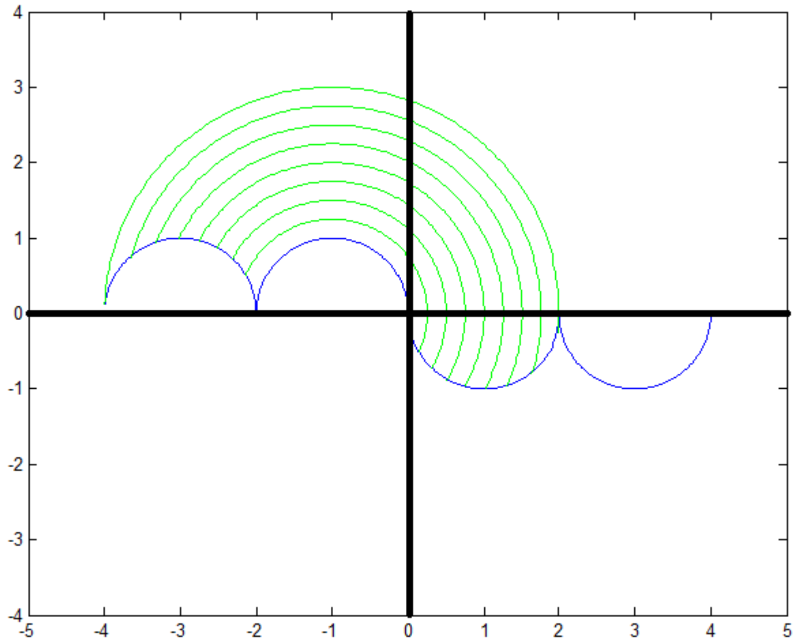
Feststellung:

γ_-^1 ist genau die Menge, die genau in $\frac{\pi}{w}$ Zeit zu γ_+^0landen. Und γ_+^1 landet in $\frac{\pi}{w}$ Zeit zu γ_-^0.

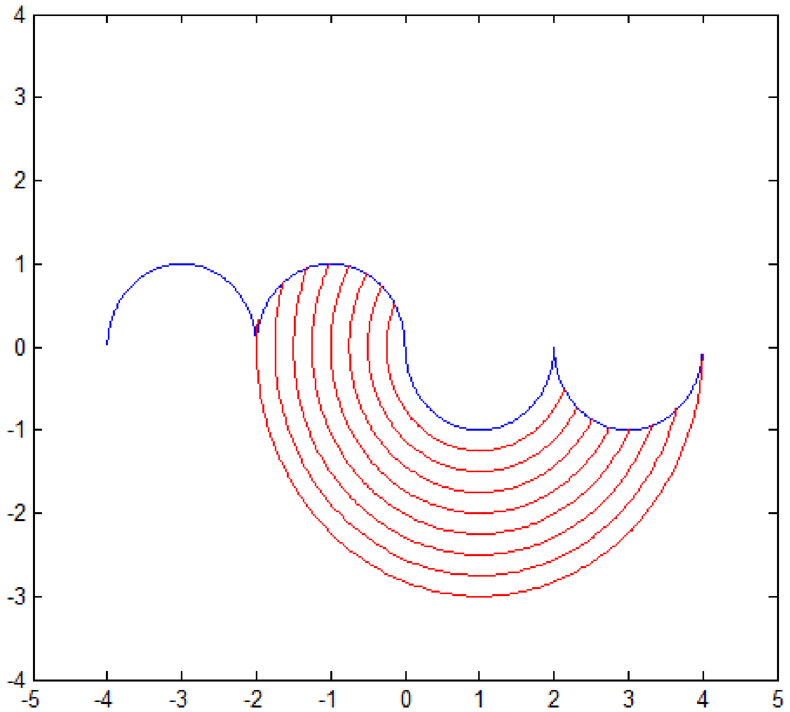


Grüne Halbkreise sind γ_-^1(links) und γ_+^1(rechts).

3. Lösung AWP



Und die grünen Halbkreisen von diesem Bild sind R_{-}^{1}.



Und die roten Halbkreisen von diesem Bild sind R_{+}^{1}.

3. Lösung AWP

Wir schauen nun nächste Lemma:

Lemma 1-b:

Gegeben sei die Menge $(wx_1, wx_2) \in\ R_+^1 \cup R_-^1$*; Dann ist die optimale Steuerung fest und zwar:*

$$u_* = +1\ f\text{ür}\ alle\ \ (wx_1, wx_2) \in\ R_+^1$$

$$u_* = -1\ f\text{ür}\ alle\ \ (wx_1, wx_2) \in\ R_-^1$$

Beweis:

Dieser Beweis ist ähnlich wie der vorherige.

Da wir schon von Lemma 1-a wissen, dass nur die Menge $\gamma_+^0 \cup \gamma_-^0$ *ohne Wechselung zu (0,0) zu landen sind.*

Aber unsere Menge $R_+^1 \cup R_-^1$ *ist dinjunkt zu der Menge* $\gamma_+^0 \cup \gamma_-^0$*, daher wir sollen versuchen schnell wie möglich die Menge* $R_+^1 \cup R_-^1$ *in der Menge* $\gamma_+^0 \cup \gamma_-^0$*zu landen.*

Die Menge $R_+^1 \cup R_-^1$ *landet auf jeden Fall innerhalb* $\frac{\pi}{w}$ *Zeit mit* $u_* = +1\ f\text{ür}\ alle\ \ (wx_1, wx_2) \in\ R_+^1$ $u_* = -1\ f\text{ür}\ alle\ \ (wx_1, wx_2) \in\ R_-^1$ *in der Menge* $\gamma_+^0 \cup \gamma_-^0$*.*

Aber was ist dann mit drei Steuerungswechsel oder mehrere?

Wie wir bereits wissen, Längen der Intervalle sind außer erste und letzte immer$\frac{\pi}{w}$*.*

Das bedeutet, dass ab dreimal Wechselung Gegensatz zu vorherige Situation mehr als $\frac{\pi}{w}$ *Zeit kostet, um in der Menge* $\gamma_+^0 \cup \gamma_-^0$*zu landen.*

Daher gilt unsere Behauptung. ■

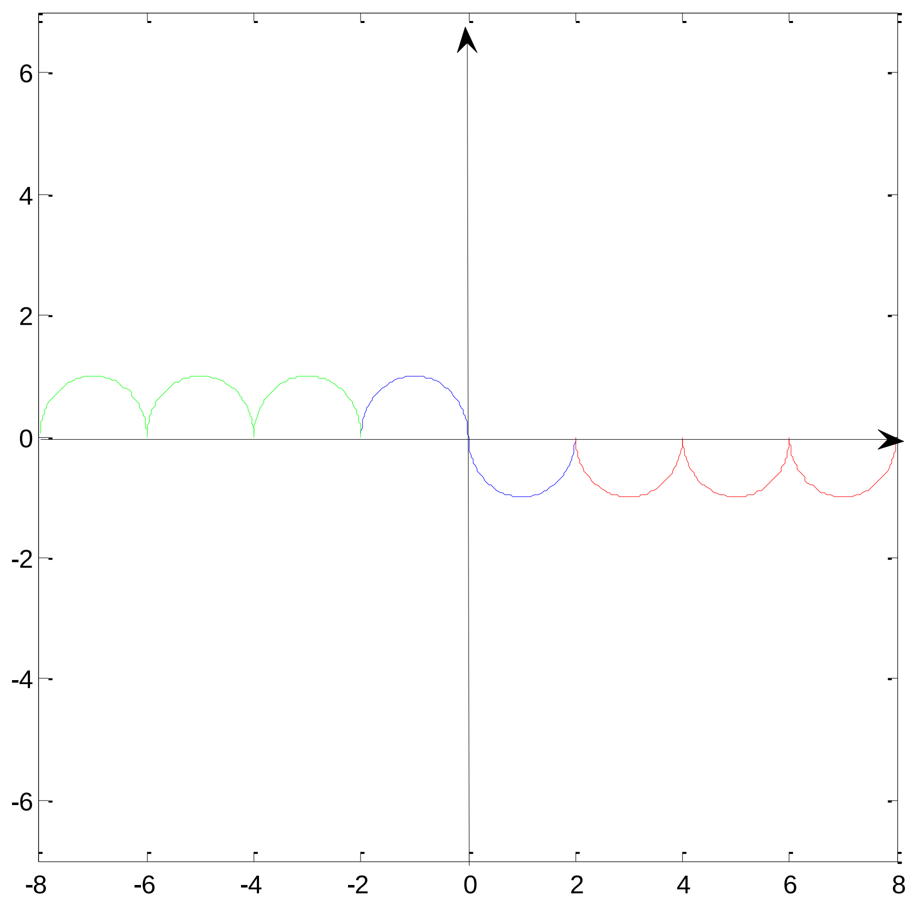
3. Lösung AWP

Definition:

Sei $j \in \mathrm{N}$*, wir definieren* $\gamma_+^{\mathrm{j}} = \{(wx_1,\ wx_2) \colon [wx_1 - (2j+1)]^2 = 1;\ \ wx_2 < 0\}$

Definition:

Sei $j \in \mathrm{N}$*, wir definieren* $\gamma_-^{\mathrm{j}} = \{(wx_1,\ wx_2) \colon [wx_1 + (2j+1)]^2 = 1;\ \ wx_2 > 0\}$



Die linken drei grünen Halbkreisen sind die Menge γ_-^{j}*(*γ_-^1, γ_-^2 und γ_-^3) *und die rechten drei roten Halbkreisen sind die Menge* γ_+^{j} (γ_+^1, γ_+^2 und γ_+^3).

Beachte, dass γ_-^0 *nicht zu* γ_-^{j} *gehört, da N bei uns mit Eins anfängt. (Analog für* γ_+^0*)*

3. Lösung AWP

Wir begegnen jetzt unsere letzten Definitionen für mein AWP.

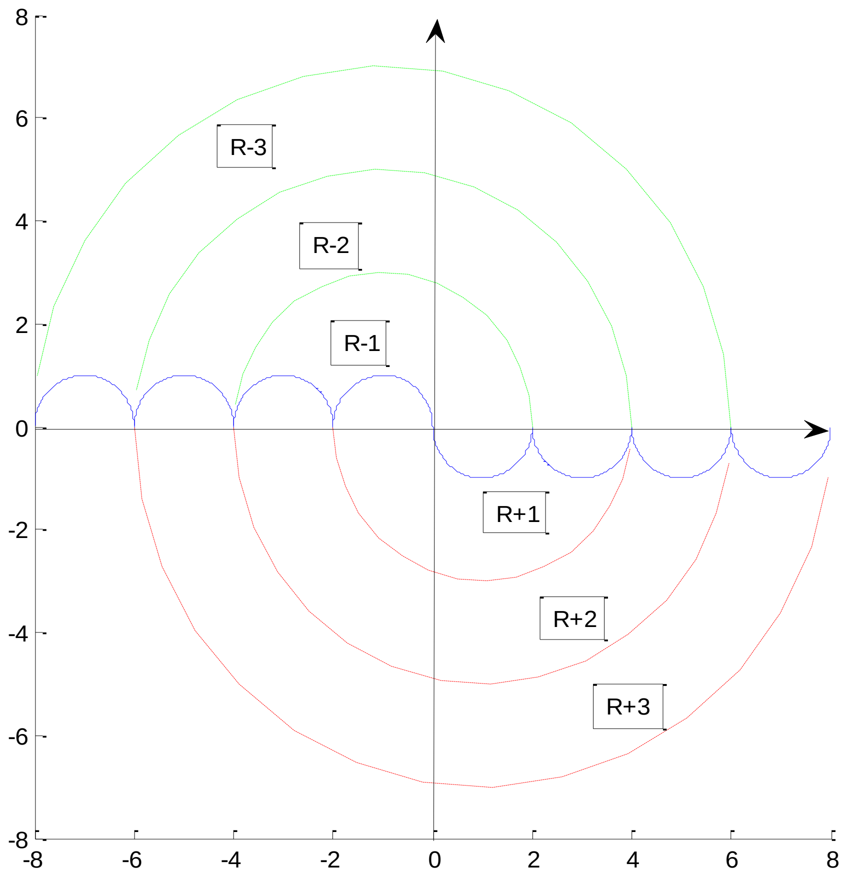
Definition:

Die Menge, die innerhalb $\frac{\pi}{w}$ Zeit zu der Kurve γ_{+}^{j-1} mit Steuerung -1 zu erreichen sind, definieren wir als R_{-}^{j}. Wobei $j \in N$ ist.

Definition:

Die Menge, die innerhalb $\frac{\pi}{w}$ Zeit zu der Kurve γ_{-}^{j-1} mit Steuerung +1 zu erreichen sind, definieren wir als R_{+}^{j}. Wobei $j \in N$ ist.

Anschaulich:



3. Lösung AWP

Wir nutzten noch die Abkürzungen:

$$\gamma = [\bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_+^j\,] \cup [\bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_-^j\,] \triangleq \gamma_+ \cup \gamma_-$$

$$R_- = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_-^j$$

$$R_+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_+^j$$

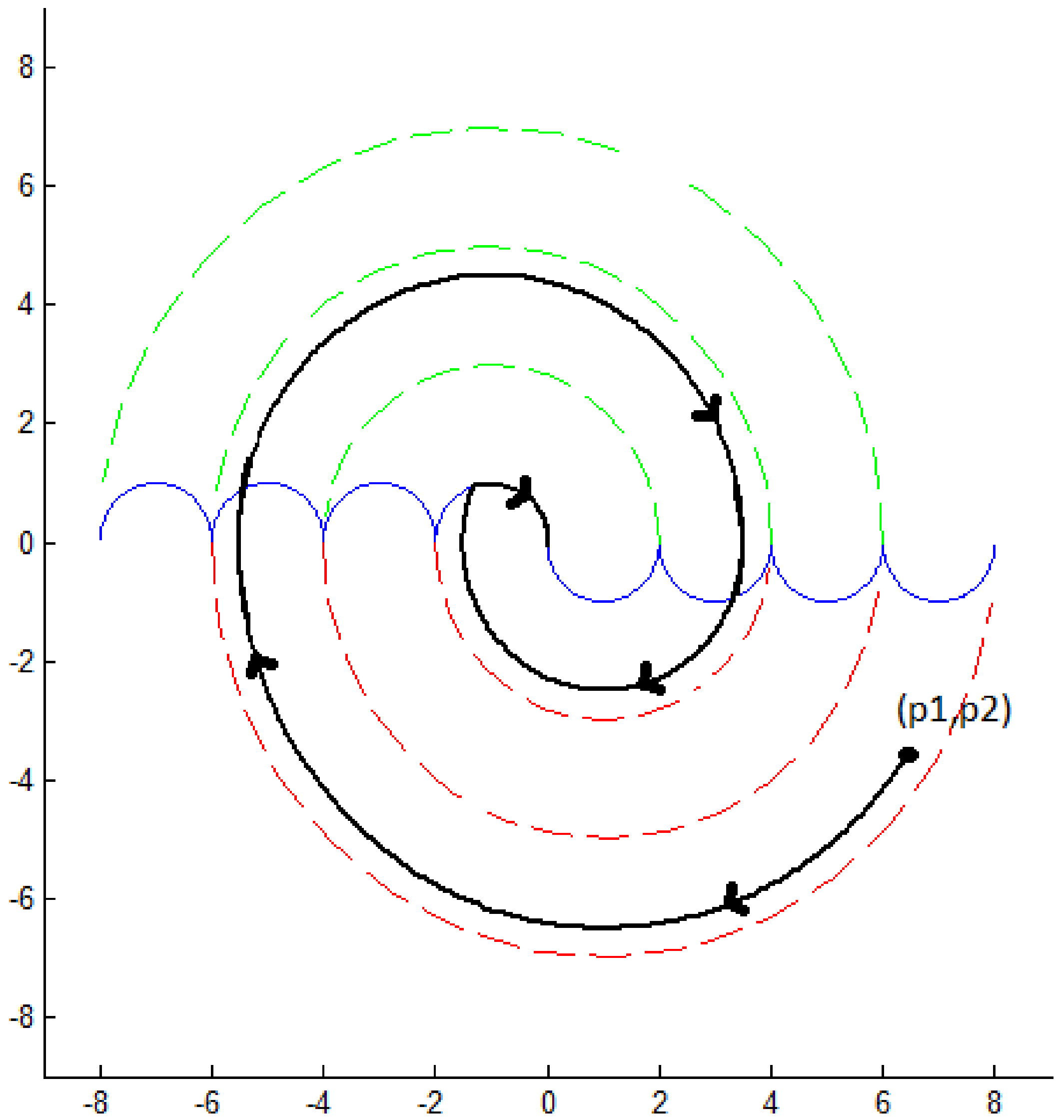
3. Lösung AWP

Lass uns jetzt unser Problem lösen:

Lösung:

Optimale Steuerung für unser Problem ist $u_* = +1$ *für* $(wx_1, wx_2) \in R_+ \cup \gamma_+$ *und* $u_* = -1$ *für* $(wx_1, wx_2) \in R_- \cup \gamma_-$*, bis unserer Punkt zu (0,0) erreicht.*

Sei (p1,p2) ein Punkt, nach unserer Lösungsvorschlag würde graphisch so aussehen:



Nun beweisen wir unsere Lösung des AWPs.

3. Lösung AWP

Beweis:

Unserer Beweis gelingt mit der Vollständige-Induktion.

Da unserer Lemma 1-a und 1-b nichts anderes sind als Induktionsanfang, kommt jetzt Induktionsschritt:

Annahme: Unserer Lösungsvorschlag gilt bis bei n (d.h. beliebige Punkt in $\{\bigcup_{j=1}^{n} R_{-}^{j}\} \cup \{\bigcup_{j=1}^{n} R_{+}^{j}\}$ *gilt unsere Behauptung.)*

Induktionsschritt:

Nach Definition von R ist das klar, dass R_{-}^{n+1} und R_{+}^{n+1} *mit unserer Lösungsvorschlag innerhalb* $\frac{\pi}{w}$ *Zeit* γ_{+}^{n} und γ_{-}^{n} *zu erreichen sind.*

Und mehr als eine Steuerungswechselung bedeutet wieder (Analog wie Beweis von vorherigen Lemma): Dass ein Punkt in R_{-}^{n+1} und R_{+}^{n+1} *mehr als* $\frac{\pi}{w}$ *Zeit benötigt, um ein Punkt in* γ_{+}^{n} und γ_{-}^{n} *zu gelingen. Da außer ersten und letzten Zeitintervall genau* $\frac{\pi}{w}$ *Zeit benötigt Steuerung zu wechseln.*

Daher ist unsere Aufgabe erledigt. ■

4. Quelle

Vorlesungsskript Einführung Kontrolltheorie SS16