



Hochschule **RheinMain**  
University of Applied Sciences  
Wiesbaden Rüsselsheim

HOCHSCHULE RHEIN-MAIN

ANWENDUNGSPROBLEME I

# Feedback-Steuerung zur Stabilisierung eines Satelliten

*Florian Hemmann*  
*578032*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Vorwissen</b>	<b>7</b>
2.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	7
2.2	Starrkörpermechanik . . . . .	8
2.3	Kontrolltheorie . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Steuerung eines Starrkörpers mit beschränkten Kosten</b>	<b>11</b>
3.1	Problemformulierung . . . . .	11
3.2	Global Asymptotisch Stabile, Lineare Steuerungsfunktion . . . . .	14
3.3	Fazit . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Beispiele</b>	<b>17</b>
4.1	Beispiel 1 . . . . .	17
4.2	Beispiel 2 . . . . .	19
4.3	Beispiel 3 . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>25</b>



# 1. Einführung

In dieser Arbeit möchten wir uns mit dem Thema 'Feedback-Steuerung zur Stabilisierung eines Satelliten' beschäftigen.

Dafür ist ein gewisses Vorwissen nötig, wovon wir einen Großteil als vorhanden voraussetzen, aber einige Feinheiten noch einmal kurz erläutern.

Im Hauptteil werden wir uns mit dem Inhalt der ersten Kapitel des Artikels 'Suboptimal Control of Rigid Body Motion with a Quadratic Cost' beschäftigen und uns mit der darin enthaltenen mathematischen Theorie auseinandersetzen.

Zum Schluss wird noch ein Ausblick darauf gegeben, wozu die herausgearbeiteten Erkenntnisse genutzt werden können und es wird die graphische Darstellung dreier Beispiele betrachtet.



## 2. Vorwissen

Wie schon erwähnt setzen wir ein gewisses Maß an Vorwissen voraus.

Dazu gehört ein grundlegendes Verständnis der Starrkörperbewegung (Bezugssysteme, Dynamik und Kinematik eines Starrkörpers,...), und der Stabilität von Gleichgewichtslagen.

Weiteres Vorwissen wird in den folgenden Punkten kurz zusammengefasst.

### 2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

**Definition 1 (Ljapunov-Funktion).** Es sei  $p$  eine Gleichgewichtslage des autonomen Systems  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ .

Gibt es eine offene Umgebung  $D$  von  $p$  und eine  $C^1$ -Funktion  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- (1)  $\Phi(p) = 0$ ;
- (2)  $\Phi(x) > 0$  für  $x \in D \setminus \{p\}$ ;
- (3)  $\langle (\nabla\Phi)(x), f(x) \rangle \leq 0$  für  $x \in D$ ,

so ist die Gleichgewichtslage  $p$  stabil. Gilt statt(3) sogar die stärkere Bedingung

$$(3') \langle (\nabla\Phi)(x), f(x) \rangle < 0 \text{ für } x \in D,$$

so ist  $p$  sogar asymptotisch stabil. Jede Funktion mit den Eigenschaften (1), (2) und(3) bzw (3') heißt eine **Ljapunov-Funktion** bzw. **strikte Ljapunov-Funktion** für das betrachtete System und die betrachtete Gleichgewichtslage.

**Satz 2 (Invarianzprinzip von LaSalle).** Seien  $\dot{x} = f(x)$ ,  $K$  eine kompakte invariante Menge und  $\Phi$  eine  $C^1$ -Funktion mit  $\langle (\nabla\Phi)(x), f(x) \rangle \leq 0$  für alle  $x \in K$ .

Es sei  $M$  die maximale invariante Teilmenge von

$$x \in K \mid \langle (\nabla\Phi)(x), f(x) \rangle = 0$$

Ist  $x$  eine beliebige in  $K$  startende Trajektorie, so gilt  $x(t) \rightarrow M$ .

## 2.2 Starrkörpermechanik

Die Cayley-Rodrigues-Parameter beschreiben die Lage eines Starrkörpers im Raum und bilden eine Alternative zu den häufig genutzten Euler-Parametern.

In unserem Fall beschreiben wir die Bewegung des Satelliten ausschließlich mit Hilfe dieser Parametrisierung.

**Definition 3 (Euler-Parameter).** Die vier **Euler-Parameter**  $e_0, e_1, e_2$  und  $e_3$  beschreiben die Rotation um eine beliebige Achse. Sie sind definiert durch

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) \\ e_1 &= e_x \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \\ e_2 &= e_y \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \\ e_3 &= e_z \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \end{aligned}$$

mit

$$e = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

dem Normaleneinheitsvektor.

**Definition 4 (Cayley-Rodrigues-Parameter).** Die **Cayley-Rodrigues-Parameter**  $\rho$  ergeben sich aus den Euler-Parametern  $e$  und sind wie folgt definiert

$$\begin{aligned} \rho_i &:= \frac{e_i}{e_0}, \quad (i = 1, 2, 3) \\ \rho_i &= e_i \tan \frac{\Phi}{2} \end{aligned}$$

Die Cayley-Rodrigues-Parameter haben gegenüber den Euler-Parametern den Vorteil die Gruppe der Rotationsmatrizen minimalistischer, aber dennoch vollständig darstellen zu können und werden bei Steuerungsanwendungen in Luft- und Raumfahrt häufig vorgezogen.



## 2.3 Kontrolltheorie

**Definition 5 (Feedback-Steuerung).** Wir betrachten ein gesteuertes System  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ . Eine **Feedback-Steuerung** liegt vor, wenn die Steuerfunktion  $u$  so gewählt wird, dass

$$u(t) = g(t, x(t))$$

mit einer fest vorgegebenen Funktion  $(t, x) \mapsto g(t, x)$  gilt.

Ist eine Funktion  $(t, x) \mapsto g(t, x)$  so zu finden, dass sich das System

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), g(t, x(t)))$$

in gewünschter Weise entwickelt, so liegt ein **geschlossener Regelkreis** vor.

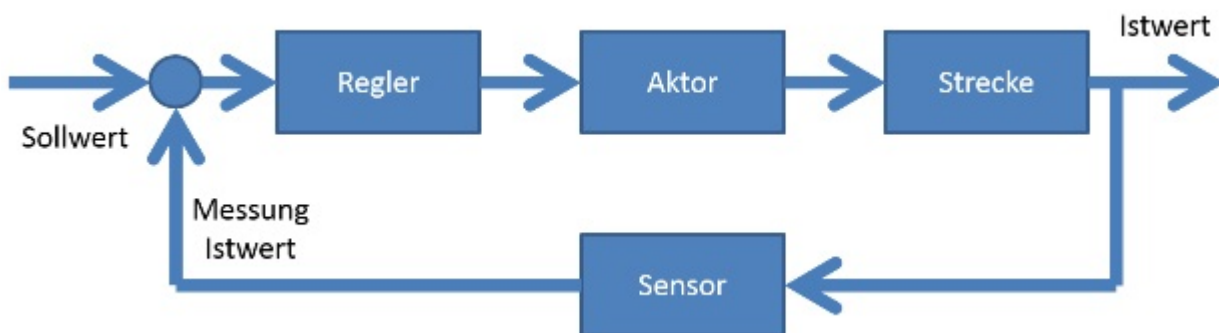


Abbildung 1: Schematische Darstellung eines Regelkreises



# 3. Steuerung eines Starrkörpers mit beschränkten Kosten

Kommen wir nun zu dem eigentlichen Teil dieser Arbeit.

Den Ideen des Artikels 'Suboptimal Control of Rigid Body Motion with a Quadratic Cost'.

In diesem Kapitel sei  $I_n$  die Einheitsmatrix der Größe  $n$  und  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ .

## 3.1 Problemformulierung

Wir betrachten die Rotationsbewegung eines Starrkörpers mittels drei unabhängigen Drehmomenten. Diese wirken auf die Achsen in einem körperfesten Bezugssystem entlang der Hauptträgheitsachsen.

Diese Art von Rotationsbewegung kann durch ein System von sechs Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden.

Drei davon beschreiben die Winkelgeschwindigkeit (dynamische Gleichungen), während die anderen drei die Änderung der räumlichen Orientierung beschreiben (kinematische Gleichungen).

Durch die Wahl eines Körperfesten Hauptachsensystems, können wir die dynamischen Gleichungen wie folgt schreiben

$$\dot{\omega} = F(\omega)\omega + J^{-1}u, \quad \omega(0) = \omega_0 \quad (3.1)$$

mit  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  und  $\omega_1, \omega_2$  and  $\omega_3$  als Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors. Die Matrix  $F(\omega)$  ist gegeben durch

$$F(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -J_3\omega_3/J_1 & J_2\omega_2/J_1 \\ J_3\omega_3/J_2 & 0 & -J_1\omega_1/J_2 \\ -J_2\omega_2/J_3 & J_1\omega_1/J_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

wobei die positiven Skalare  $J_1, J_2$  und  $J_3$  die Hauptträgheitsmomente des Starrkörpers bezüglich seines Massemittelpunktes sind. Die Matrix  $J$  ist eine Diagonalmatrix

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

Sei  $S(\omega)$  eine schiefsymmetrische Matrix definiert durch

$$S(\omega) := \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Dann können wir  $F(\omega)$  schreiben als

$$F(\omega) = J^{-1}S(J\omega) \quad (3.4)$$

Um die Orientierung des Körpers im Raum zu beschreiben, benötigen wir noch die kinematischen Gleichungen. Diese drücken wir durch die in Kapitel 2.2 eingeführten Cayley-Rodrigues-Parameter  $\rho_1, \rho_2$  und  $\rho_3$  aus. Die dadurch erhaltenen Gleichungen lauten

$$\dot{\rho} = G(\rho)\omega, \quad \rho(0) = \rho_0 \quad (3.5)$$

mit  $\rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3]^T$  als kinematischem Vektor,

$$G(\rho) := \frac{1}{2}(I_3 + S(\rho) + \rho\rho^T) \quad (3.6)$$

und  $S(\rho)$  als schiefsymmetrischer Matrix, definiert in (3.3).

Eine nützliche Eigenschaft der Cayley-Rodrigues-Darstellung ist, dass wir für alle  $\rho \in \mathbb{R}^3$  folgendes erhalten

$$\rho^T G(\rho) = \frac{1}{2}(1 + \|\rho\|^2)\rho^T \quad (3.7)$$

Diese Eigenschaft nutzen wir später zur Berechnung der Ableitung unserer Ljapunov-Funktion verknüpft mit einem nichtlinearen System entstanden aus (3.1) und (3.5).

Wenn die Cayley-Rodrigues-Parameter gleich Null sind, also  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ , ist die Rotationsmatrix gleich der Einheitsmatrix und die Ausrichtung des körperfesten und raumfesten Koordinatensystems stimmen überein. Dies ist unser Zielzustand.

Ein System entstanden aus (3.1) und (3.5) liefert uns den *performance output*

$$z = C \begin{bmatrix} \rho \\ \omega \end{bmatrix} + Du \quad (3.8)$$

mit  $C$  und  $D$  als gegebene reelle Matrizen. Für jeden Anfangszustand  $[\rho_0^T \ \omega_0^T]^T \in \mathbb{R}^6$  und Steuerungsinput  $u(\cdot)$ , bekommen wir ein Kostenfunktional für den Output gegeben durch

$$\mathcal{J}(\rho_0, \omega_0, u(\cdot)) := \int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt. \quad (3.9)$$

Das Ziel des Artikels ist es folgendes Problem zu lösen (*Quadratic Regulation Problem (QRP)*). Wir betrachten das nichtlineare System

$$\dot{\rho} = G(\rho)\omega \quad (3.10a)$$

$$\dot{\omega} = F(\omega)\omega + J^{-1}u \quad (3.10b)$$

mit  $F(\cdot)$  definiert in (3.2),  $G(\cdot)$  definiert in (3.6) und dem Kostenfunktional gegeben in (3.8) und (3.9).

Sei nun eine beliebige beschränkte Menge  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^6$  gegeben, welche den Ursprung und beliebige positive Skalare  $\gamma$  enthält. Dann erhalten wir eine (Feedback-)Steuerungsfunktion  $u = \kappa(\rho, \omega)$ , sodass:

- (i) unser geschlossener Regelkreis asymptotisch stabil um den Nullpunkt ist, mit  $\mathcal{C}$  enthalten im Attraktionsbereich;
- (ii) für jeden Anfangszustand  $[\rho_0^T \ \omega_0^T]^T \in \mathcal{C}$  ist das Kostenfunktional beschränkt

$$\mathcal{J}(\rho_0, \omega_0, u(\cdot)) \leq \gamma. \quad (3.11)$$

## 3.2 Global Asymptotisch Stabile, Lineare Steuerungsfunktion

In diesem Abschnitt betrachten wir einfache, lineare Steuerungen, welche unser nichtlineares System (3.10) global asymptotisch stabilisieren.

*Lemma 6.* Die lineare Steuerungsfunktion

$$u = -\kappa_1\omega - \kappa_2\rho, \quad (3.12)$$

mit  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  als beliebige positive Skalare, stabilisiert das System (3.10) global asymptotisch. Darüber hinaus erhalten wir für jeden Anfangszustand  $(\rho_0, \omega_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{J}(\rho_0, \omega_0, u(\cdot)) < \infty.$$

### Hinweis:

In unserem Fall kann man sich die Steuerungsfunktion  $u$  vorstellen als

$$u(t) = -\kappa_1(\omega(t) - 0) - \kappa_2(G(\rho(t)) - \mathbb{1}).$$

Wir betrachten also die Differenz zwischen den Momentanzuständen  $\omega$  und  $\rho$ , welche wir aus Messungen erhalten, und den Zielzuständen Nullvektor und Einheitsmatrix. Dann passen wir  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  an, um auf Zustandsänderungen bestmöglich zu reagieren.

*Beweis.* Wir definieren die positiv definite Funktion

$$V(\rho, \omega) := \frac{1}{2}\omega^T J\omega + \kappa_2 \ln(1 + \|\rho\|^2). \quad (3.13)$$

Wir zeigen, dass diese eine Lyapunov-Funktion für unseren geschlossenen Regelkreis ist. Die ersten beiden Bedingungen nachzuweisen ist in diesem Fall trivial. Für die dritte Bedingung leiten wir (3.13) entlang der Trajektorien des Regelkreises, den wir durch (3.10) und (3.12) erhalten, ab und nutzen (3.7). Dies führt zu

$$\dot{V} = -\kappa_1\omega^T J\omega \leq 0. \quad (3.14)$$

Um asymptotische Stabilität garantieren zu können, müsste  $\dot{V}$  aber echt kleiner als Null sein. Um dennoch eine exakte Aussage über die Stabilität treffen zu können, nutzen wir das Invarianzprinzip von LaSalle.

Da  $V$  (global) unbeschränkt ist, folgt, dass alle Trajektorien beschränkt sind. Aus  $\dot{V} \equiv 0$  erhalten wir  $\omega \equiv 0$ , was uns zu  $\dot{\omega} \equiv 0$  und  $\rho \equiv 0$  führt. Dann folgt aus dem Invarianzprinzip von LaSalle, dass der Regelkreis global asymptotisch stabil im Nullpunkt ist.

Um zu zeigen, dass die Kosten (3.9) beschränkt sind, müssen wir wissen, dass die Steuerung (3.12) lokal exponentiell stabilisierend ist, oder äquivalent, die Linearisierung des Regelkreises ist asymptotisch stabil. Diese ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_3/2 \\ -J^{-1}\kappa_2 & -J^{-1}\kappa_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Betrachten wir nun die positiv definite Funktion

$$V(\rho, \omega) := \kappa_2 \rho^T \rho + \frac{1}{2} \omega^T J \omega. \quad (3.16)$$

Leiten diese entlang der Trajektorien des Systems (3.15) ab und erhalten

$$\dot{V} = -\kappa_1 \omega^T \omega \leq 0.$$

Aus  $\dot{V} \equiv 0$  erhalten wir, analog zum eben Gezeigten,  $\omega \equiv 0$ , was uns zu  $\dot{\omega} \equiv 0$  und  $\rho \equiv 0$  führt. Daraus folgt, dass das System (3.15) asymptotisch stabil für alle  $\kappa_1 > 0$  und  $\kappa_2 > 0$  ist, und damit das System (3.10) mit Steuerungsfunktion (3.12) lokal exponentiell stabil. Anschaulich heißt das unser  $u$  bewirkt, dass

$$\|G(\rho) - \mathbb{1}\|^2 + \|\omega(t) - 0\|^2 \xrightarrow{exp} 0.$$

Da der Regelkreis lokal exponentiell stabil ist, existieren positive Skalare  $\delta, \eta_1$  und  $\eta_2$ , sodass  $\|x(t_0)\| \leq \delta$  zu Folgendem führt

$$\|x(t)\| \leq \eta_1 \|x(t_0)\| e^{-\eta_2(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.17)$$

mit  $x(t)$  als Trajektorie startend in  $x(t_0)$ . Darüber hinaus garantiert die global asymptotische Stabilität des Regelkreises, dass es für jeden Anfangszustand  $[\rho_0^T \ \omega_0^T]^T \in \mathbb{R}^6$  eine Zeit  $t^*$  gibt mit  $\|x(t)\| \leq \delta$  für alle  $t \geq t^*$ .

Um nun zu zeigen, dass die Kosten (3.11) beschränkt sind, betrachten wir eine Trajektorie, startend in einem beliebigen Punkt  $x_0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\rho_0, \omega_0, u(\cdot)) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \|z(t)\|^2 dt \\ &= \int_0^{t^*} \|z(t)\|^2 dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t^*}^T \|z(t)\|^2 dt \end{aligned} \quad (3.18)$$

Für den Teil der Trajektorie, der in  $x(t^*)$  startet, bekommen wir durch (3.17), dass

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t^*}^T \|x(t)\|^2 dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \|x(\tau + t^*)\|^2 d\tau \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \eta_1 \|x(t^*)\| \int_0^T e^{-\eta_2 \tau} d\tau < \infty \end{aligned}$$

Nutzen wir (3.12) und die Definition von  $z$ , erhalten wir die Beschränktheit des zweiten Integrals in (3.18) und damit auch

$$\mathcal{J}(\rho_0, \omega_0, u(\cdot)) < \infty$$

unsere Behauptung. □

### 3.3 Fazit

Das eben bewiesene Lemma ist der Hauptgrund sich die vorgestellte Methodik zu betrachten. Es garantiert uns, dass das System (3.10) eine, für ein nichtlineares System untypische, lineare Steuerungsfunktion besitzt, welche das System global asymptotisch stabilisiert.

Zusätzlich garantiert es uns beschränkte Kosten (3.9) für unsere Steuerung (3.12). Dies ist gerade in der heutigen Zeit, in der viel über Klimaschutz, Schonung von Ressourcen und Kosteneinsparung nachgedacht wird, natürlich ein sehr wichtiger Punkt.

Der logische nächste Schritt ist es jetzt diejenige Steuerung zu finden, welche uns die geringst möglichen Kosten liefert. Eine Methodik dazu findet man in dem Bezugsartikel, eine Ausführung an dieser Stelle würde allerdings zu weit führen.

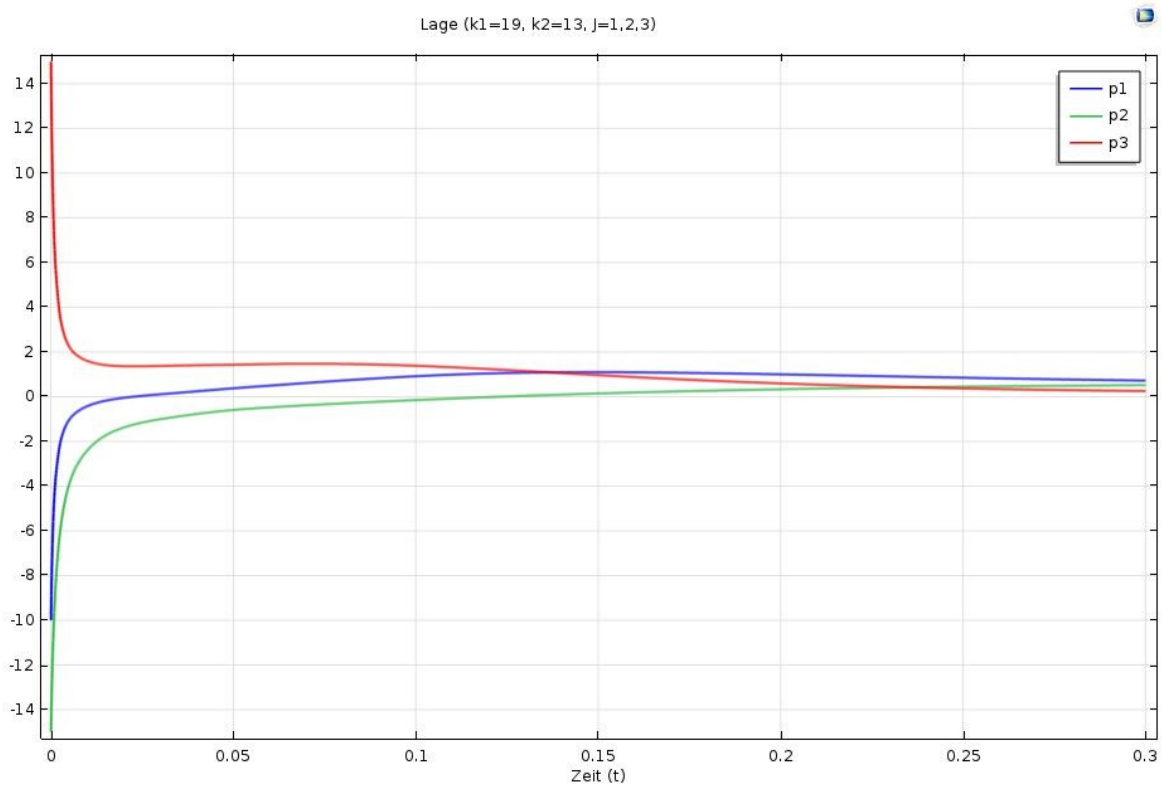


## 4. Beispiele

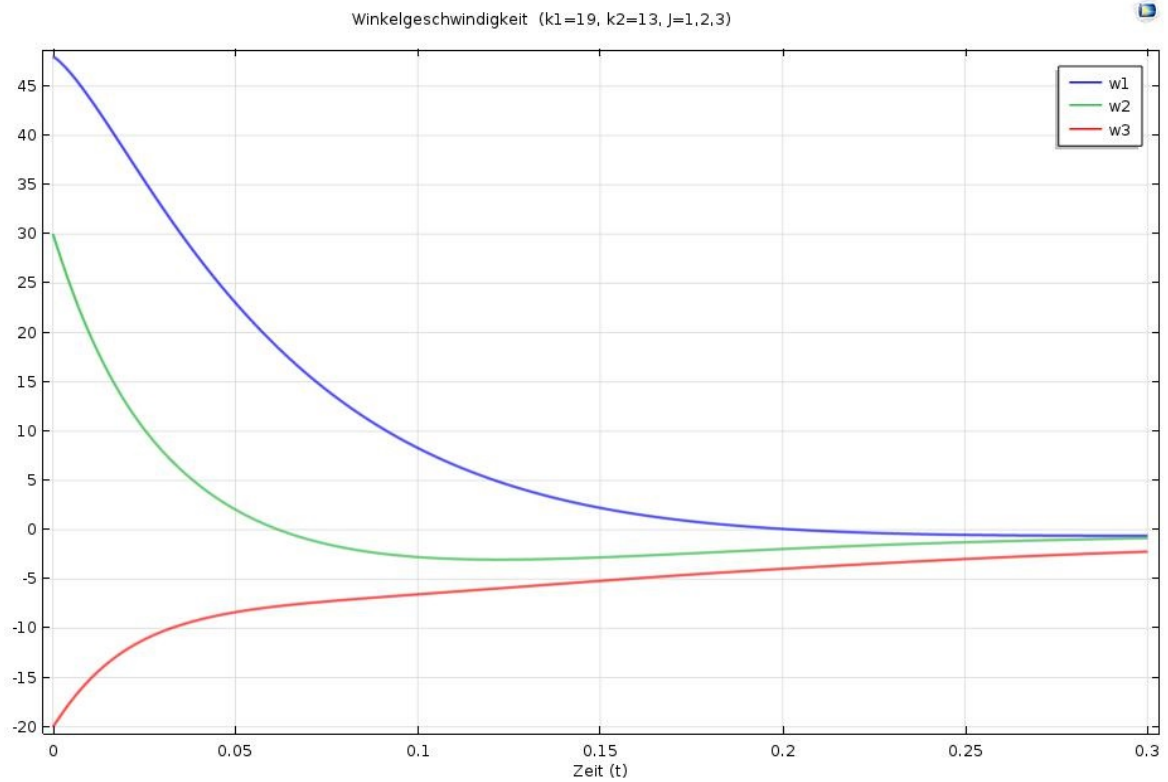
Abschließend betrachten wir noch die Entwicklungskurven für Lage und Winkelgeschwindigkeit bei verschiedenen Anfangszuständen.

### 4.1 Beispiel 1

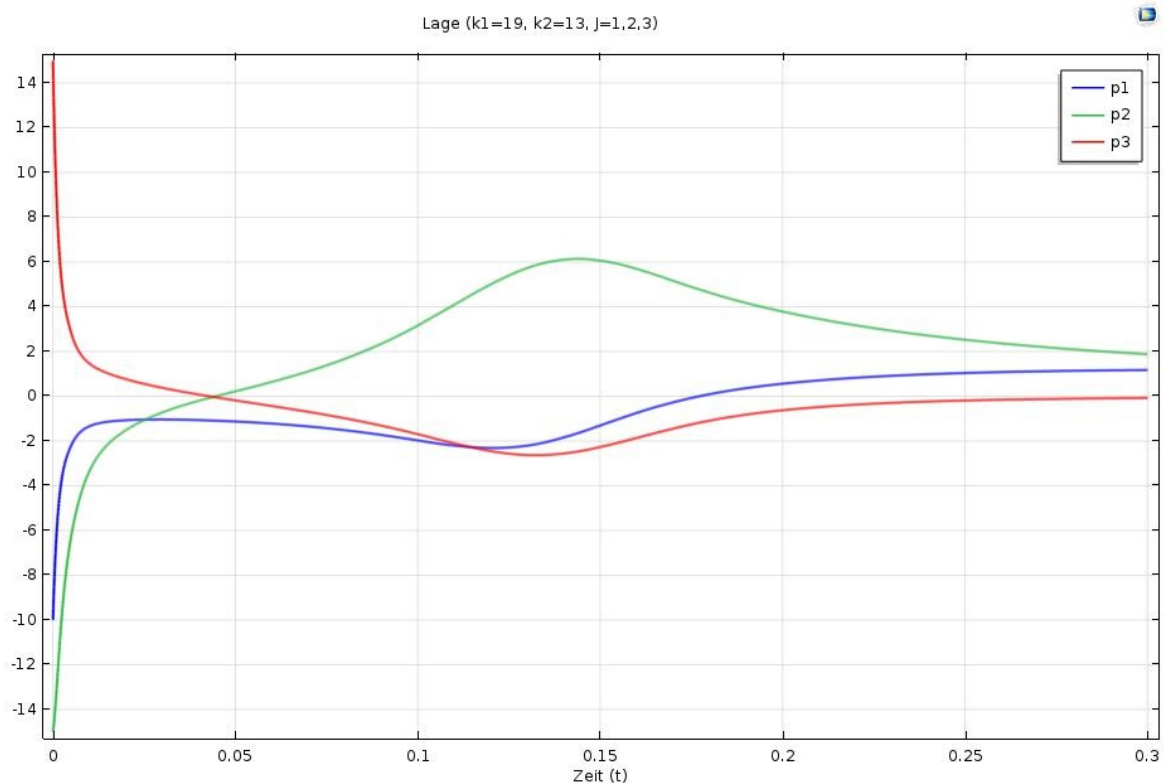
Der erste Anfangszustand den wir betrachten, ist  $\rho_0 = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$  und  $\omega_0 = \begin{bmatrix} 48 \\ 30 \\ -20 \end{bmatrix}$   
mit  $\kappa_1 = 19$  und  $\kappa_2 = 13$ . Daraus ergeben sich folgende Plots



## 4 Beispiele



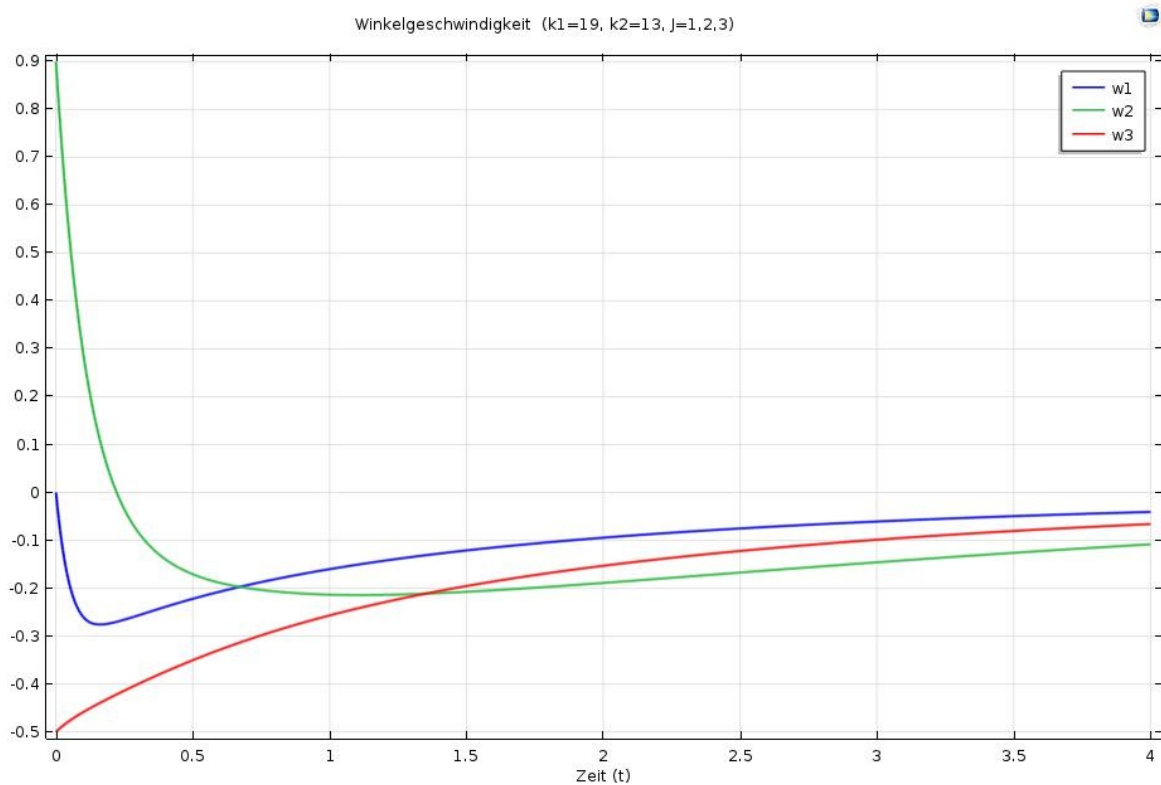
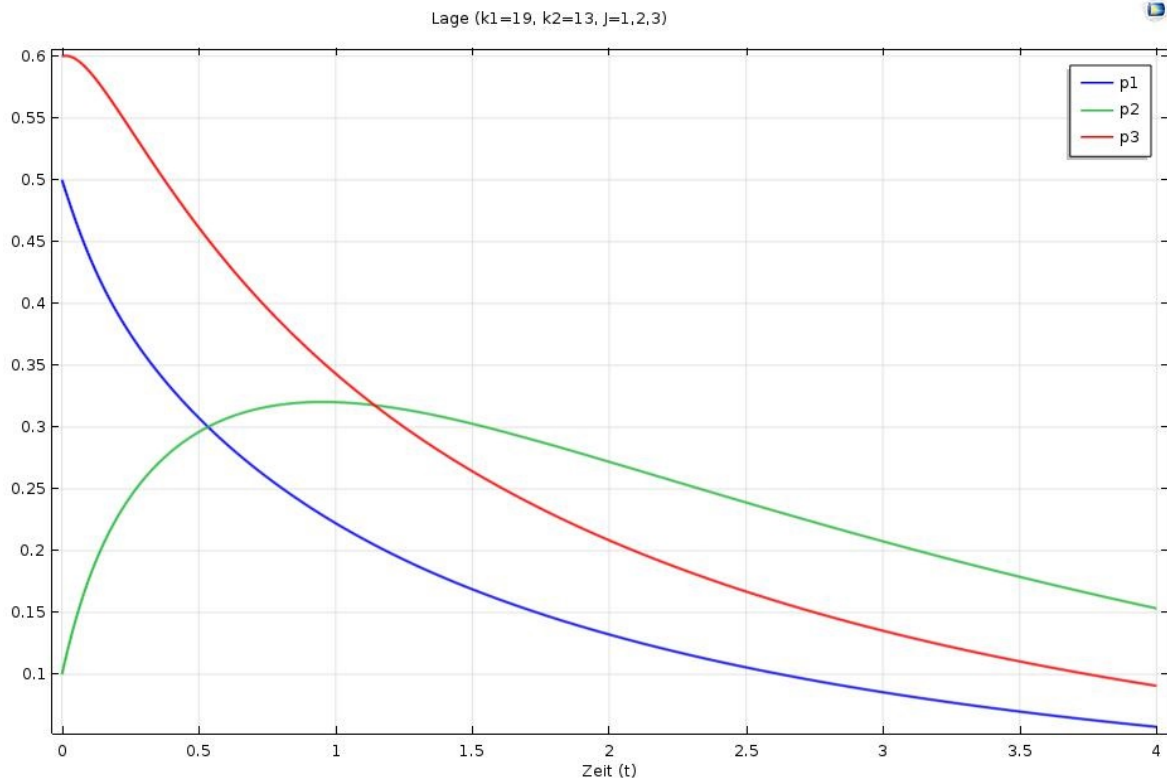
Jetzt ändern wir unsere Startgeschwindigkeit ein wenig ab und beobachten, welchen Einfluss dies auf die Entwicklung der Lage nimmt. Dafür setzen wir  $\omega_0 = \begin{bmatrix} 48 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$ .



Wir sehen, dass in diesem Fall unsere zweite Winkelgeschwindigkeit eine zeitaufwendigere Entwicklung der Lage hin zur Ruhelage bewirkt.

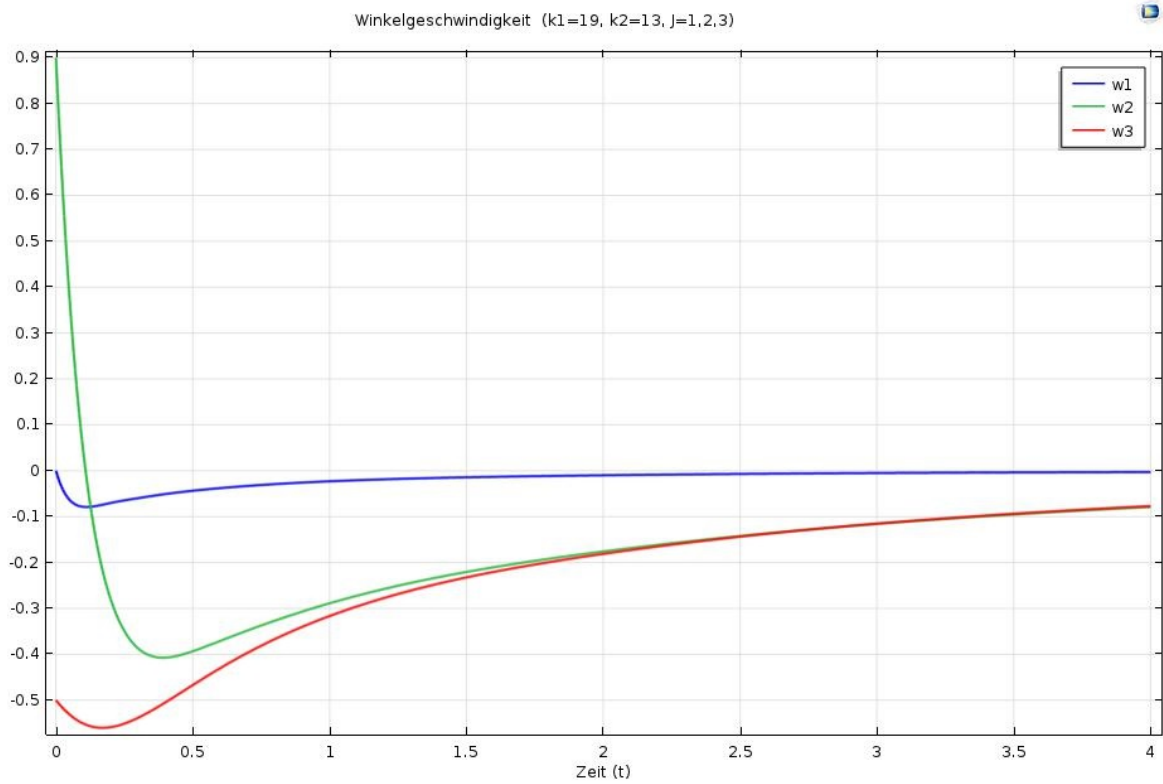
## 4.2 Beispiel 2

Der zweite Anfangszustand den wir betrachten, ist  $\rho_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ 0.6 \end{bmatrix}$  und  $\omega_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9 \\ -0.5 \end{bmatrix}$   
 mit  $\kappa_1 = 19$  und  $\kappa_2 = 13$ . Daraus ergeben sich folgende Plots



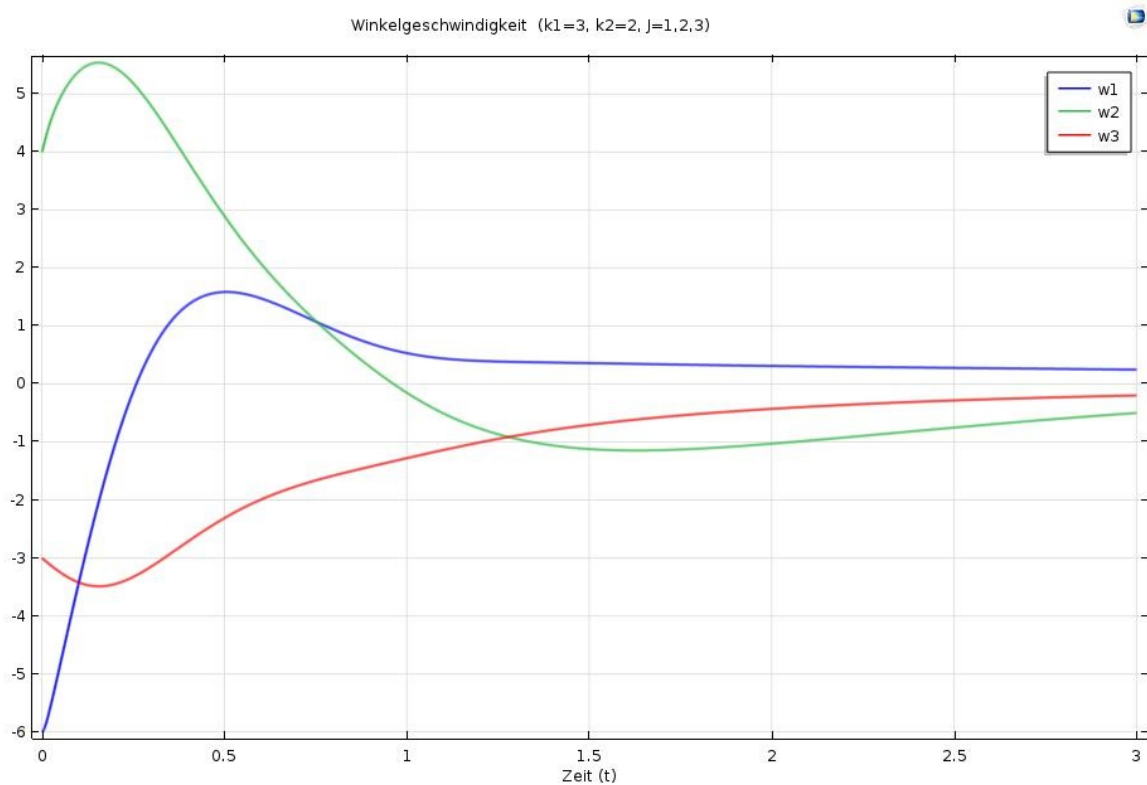
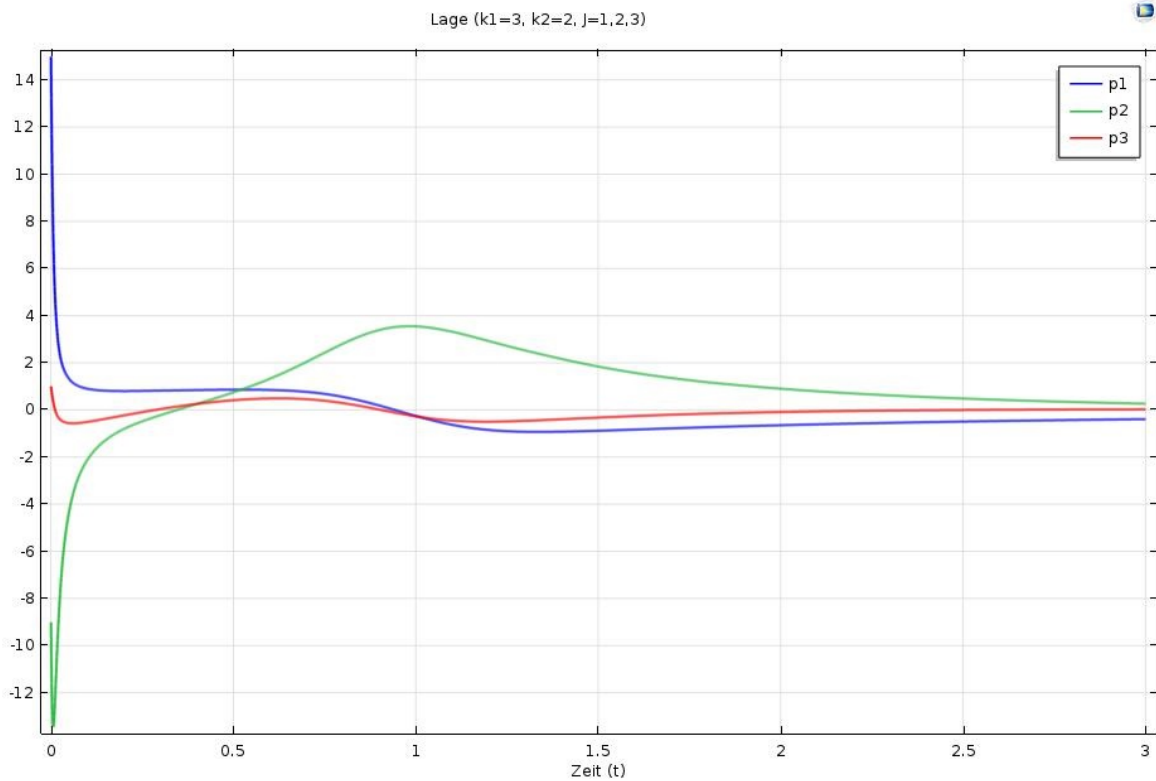
#### 4 Beispiele

Diesmal ändern wir unsere Anfangslage auf  $\rho_0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.7 \\ 0.9 \end{bmatrix}$  und beobachten, wie sich die Entwicklung der Winkelgeschwindigkeit ändert.



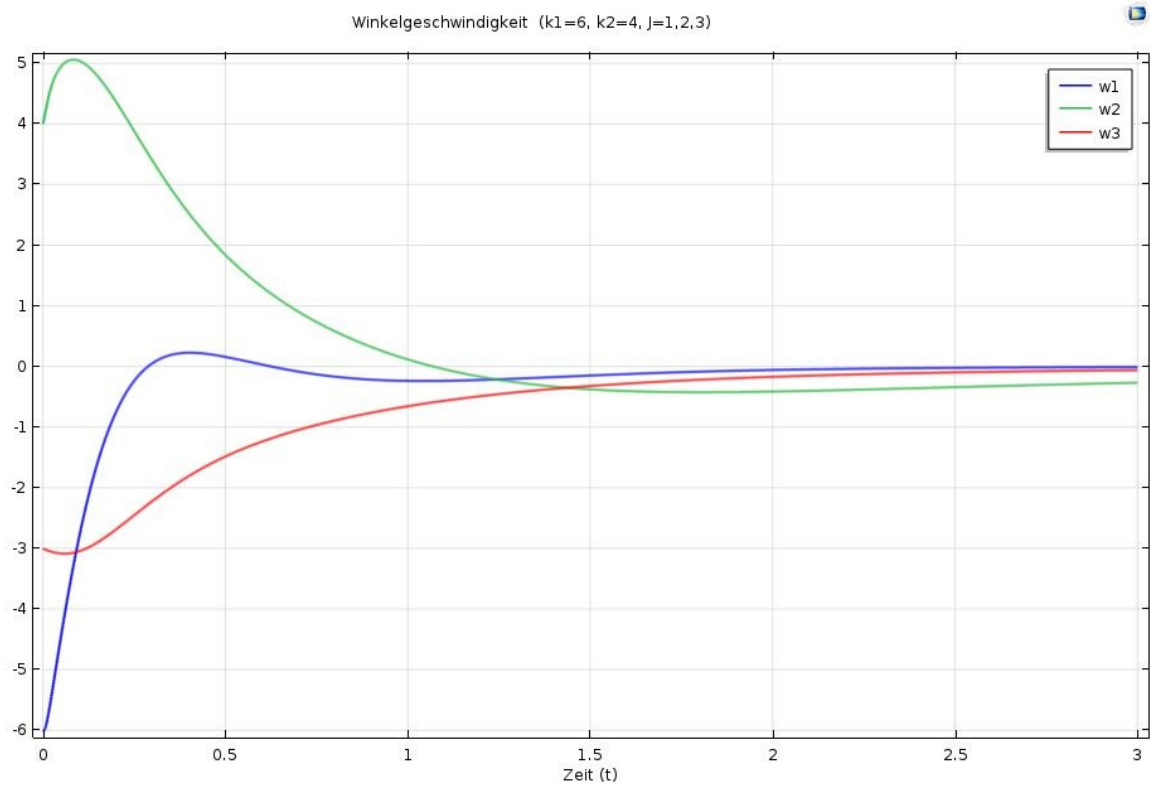
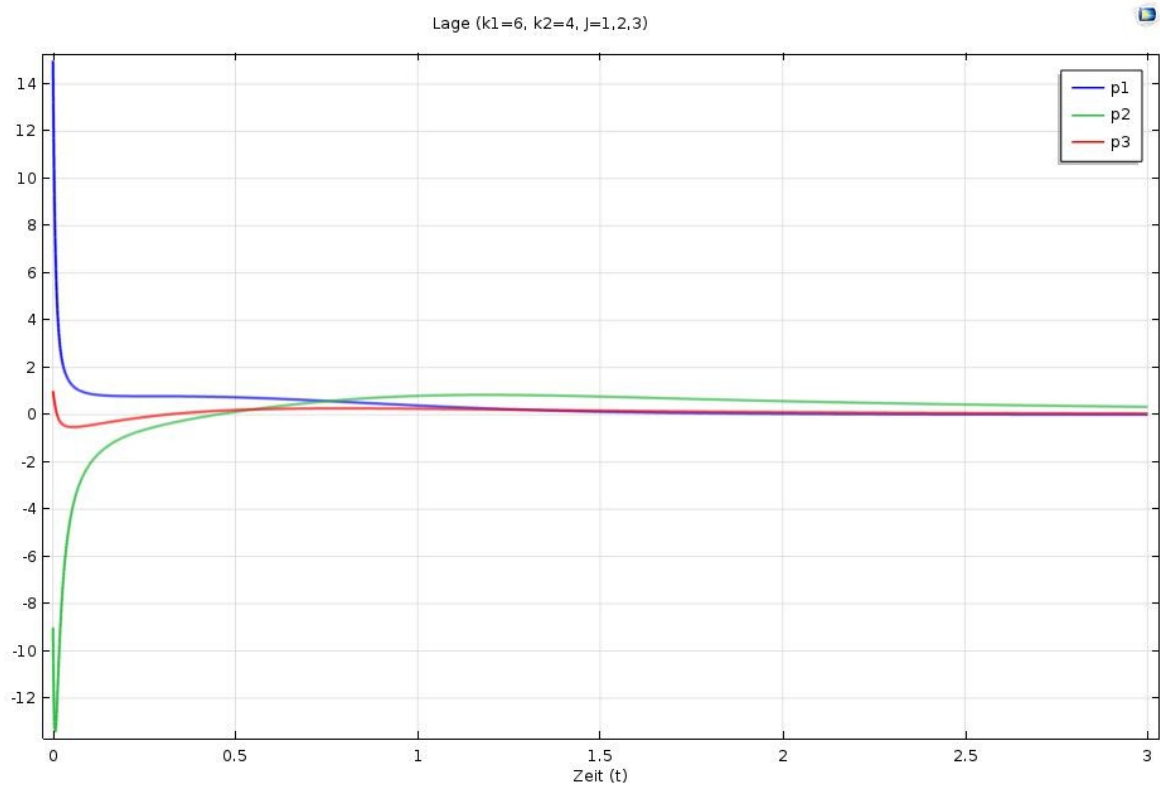
### 4.3 Beispiel 3

Abschließend betrachten wir den Anfangszustand  $\rho_0 = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$  und  $\omega_0 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$  mit  $\kappa_1 = 3$  und  $\kappa_2 = 2$ . Daraus ergeben sich folgende Plots



#### 4 Beispiele

Der Anfangszustand bleibt jetzt unverändert, dafür werden die  $\kappa$  verdoppelt auf  $\kappa_1 = 6$  und  $\kappa_2 = 4$ .



Dieses Beispiel zeigt, dass eine Erhöhung des Parameters  $\kappa$  eine schnellere Annäherung an die Gleichgewichtslage bewirkt. Jetzt liegt natürlich die Idee nahe,  $\kappa$  beliebig zu erhöhen. Dies ist in der Realität allerdings nicht möglich, da damit auch die Kosten erhöht werden oder technische Grenzen erreicht werden. Zum Beispiel kann ein Motor keine beliebig hohe Leistung erbringen und größere Motoren besitzen meist eine höhere Masse und verbrauchen mehr Ressourcen.





## 5. Literaturverzeichnis

- M. A. Rotea, P. Tsiotras, M. Corless: „Suboptimal Control of Rigid Body Motion with a Quadratic Cost“, in Dynamics and Control 1998
- K. Spindler: „Höhere Mathematik“, 2011
- D. Schaechter, K.R. Lorell: „Automatic Control in Aerospace“, 1994
- <http://mathworld.wolfram.com/EulerParameters.html>