



Hochschule **RheinMain**  
University of Applied Sciences  
Wiesbaden Rüsselsheim

# Implementierung und Vergleich von Beobachterkonzepten für automatisierte Fahrzeuge

Lösen von Anwendungsproblem I  
WS 2016/2017

Kay Hansel

25. November 2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theoretischer Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	Gesteuerte Systeme . . . . .	4
2.2	Steuerbarkeit . . . . .	4
2.3	Beobachtbarkeit . . . . .	5
2.4	Dualität zwischen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Entwurf eines Beobachters</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Luenberger-Beobachter</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Kalman Filter</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Gedämpfter Harmonischer Oszillator</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>Literatur</b>	<b>18</b>

# 1 Einleitung

Der Trend der Fahrzeugführung tendiert immer mehr zum selbstständigen Fahren des Fahrzeugs. Während neue Assistenzsysteme helfen, die Fahrzeugbedienung für den Fahrer zu vereinfachen, denkt die Automobilindustrie schon weiter. Der Fokus liegt auf der Entwicklung des autonomen Fahrzeugs, welches die Insassen vom Starten des Systems bis zum gewünschten Ziel ohne menschliches Eingreifen befördert. Damit sich solche autonome Steuerungen und Regelungen physikalischer Größen vom Fahrzeug realisieren lassen, müssen die Zustandsgrößen der Systeme bekannt sein. In der Regel werden diese Größen von Sensoren gemessen. Falls dies nur durch einen großen Aufwand, hohe Kosten oder sogar nicht möglich ist, müssen diese Zustände beobachtet bzw. rekonstruiert werden. Zur Umsetzung einer solchen Zustandsschätzung werden häufig die zwei folgenden Methoden verwendet:

- Luenberger-Beobachter und der
- Kalman-Filter.

Basierend auf nicht iterativen Schätzverfahren, sind diese Zustandsschätzungen bei begrenzter Rechenkapazität echtzeitfähig.

Zunächst wird in dieser Ausarbeitung theoretische Grundlagen, gefolgt von den Ideen der des Luenberger-Beobachter und des Kalman-Filters erläutert und anschließend verglichen. Schließlich wird für ein klassisches lineares Einspurmodells eine Zustandsschätzung entworfen und das Verhalten der Schätzungen in Form des Stell- und Störverhaltens verglichen. Vor- und Nachteile von den einzelnen Zustandsschätzverfahren werden in einem Resümee zusammengefasst.

## 2 Theoretischer Grundlagen

Dieses Kapitel befasst sich mit der Wiederholung von theoretischen Grundlagen der Vorlesung „Einführung in die Kontrolltheorie“, die zum Verständnis dieser Ausarbeitung von Nöten sind. Es ist wichtig anzumerken, dass die folgenden Abschnitte grundsätzlich zum Auffrischen bereits vorhandener Vorkenntnisse sind und die wichtigen Punkte von bereits behandelten Sachgebieten kurz erläutern.

### 2.1 Gesteuerte Systeme

Um grundlegende Kenntnisse über gesteuerte Systeme voraussetzen zu können, definieren wir im folgenden ein solches System, welches durch eine Steuerungsfunktion von außen beeinflusst werden kann und sich zeitlich durch seine Eigendynamik und der Steuerung in gewünschter Weise entwickeln lässt.

**Definition 2.1.1.** Ein *gesteuertes System* ist gegeben durch eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$$

mit einer *Steuerungsfunktion*  $u$ , die Eingriffe von außen in das System modelliert.

In dieser Definition wird  $t$  als Zeit,  $x(t)$  als die Zustandsgröße des Systems zur Zeit  $t$  sowie  $u(t)$  als den Wert der Einflussgröße mit den man zur Zeit  $t$  in das System eingreifen kann gedeutet. Prinzipielle Idee eines gesteuerten Systemes ist in Abb. 1 gezeigt: Ein dynamisches System  $f(t, x(t), u(t))$  wird durch die Eingangsgröße  $u(t)$  beeinflusst. Dies wirft nun die Frage



Abbildung 1: Ein gesteuertes System

auf, ob sich ein gegebenes System beliebig steuern lässt. Somit folgt der nächste Abschnitt **die Steuerbarkeit**.

### 2.2 Steuerbarkeit

**Definition 2.2.1.** Wir betrachten ein System  $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$  mit  $u \in \mathcal{U}$ , wobei  $\mathcal{U}$  eine vorgegebene Familie zulässiger Steuerungsfunktionen sei. Gegeben seien ferner zwei Zeiten  $s < t$ , ein vorgegebener Anfangszustand  $a$  und ein gewünschter Zielzustand  $z$ . Das System heißt **steuerbar** von dem Anfangszustand  $a$  in den Zielzustand  $z$  im Zeitintervall  $[s, t]$ , wenn es eine Steuerungsfunktion  $u \in \mathcal{U}$  derart gibt, dass die Lösung  $x_u$  des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(s) = a$$

die Bedingung  $x_u(t) = z$  erfüllt. Wir nennen das System **vollständig steuerbar**, wenn es zu je zwei Zuständen  $a$  und  $z$  jeder Anfangszeit  $s$  eine Zeit  $t$  gibt, dass das System im Zeitintervall  $[s, t]$  von  $a$  nach  $z$  gesteuert werden kann.

Haben wir als Spezialfall ein lineares und zeit invariantes System  $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$  gegeben, folgt der Satz über die **Kalman-Matrix**. Mit Hilfe dieser Matrix, lässt sich feststellen ob ein System steuerbar ist.

**Satz 2.2.1.** Das lineare System  $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$  mit konstanten Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die **Kalman-Matrix**  $K := [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot m)}$  den Rang  $n$  bzw. vollen Rang hat.

Durch die Kenntnis, ein gegebenes System steuern zu können, fragt man sich nun, ob sich durch gegebene Messungen an dem System, der Systemzustand rekonstruiert lässt. Die prinzipielle Idee ist in Abb. 2 gezeigt: Ein dynamisches System  $f(t, x(t), y(t))$  wird durch eine Steuerungsfunktion  $u(t)$  beeinflusst und gibt durch eine Beobachtungsfunktion  $y(t)$  Informationen über die Systemzustände aus.

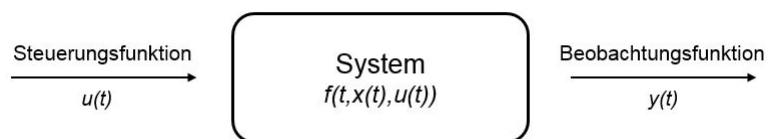


Abbildung 2: Ein gesteuertes System mit einer Beobachtungsfunktion

## 2.3 Beobachtbarkeit

**Definition 2.3.1.** Wir betrachten ein gesteuertes System  $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$  und eine Beobachtungsfunktion  $y = g(t, x, u)$ , die angibt, welchen Wert eine Messgröße annimmt, wenn zur Zeit  $t$  eine Messung an dem betrachteten System vorgenommen wird und sich dieses im Zustand  $x$  unter dem Einfluss der Steuergröße  $u$  befindet. Wir nennen das System

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad y(t) = g(t, x(t), u(t))$$

(vollständig) beobachtbar im Zeitintervall  $[s, t]$ , wenn durch die Messwerte  $y(\tau)$  mit  $s \leq \tau \leq t$  der Anfangszustand  $x(s)$  eindeutig bestimmt ist.

Haben erneut den Spezialfall eines linearen und zeit invarianten Systemes  $\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), y(t) = g(t, x(t), u(t))$ , folgt der Satz über die **Beobachtbarkeits-Matrix**. Mit Hilfe dieser Matrix, lässt sich feststellen ob ein Beobachtbar ist steuerbar ist.

**Satz 2.3.1.** Das lineare System  $\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), y(t) = g(t, x(t), u(t))$  mit konstanten Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  und  $D \in \mathbb{R}^{p \times n}$  ist genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B := [C|CA|CA^2|\dots|CA^{n-1}]^T \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times n}$  den Rang  $n$  bzw. vollen Rang hat.

Solche Systeme, bei denen die Informationen der Beobachtungsfunktion nicht in die Steuerungsfunktion eingespeist werden, bezeichnet man **Offene Regelstrecken** („open-loop-systems“).

Als Spezialfall wird ein **lineares** und **zeit invariantes** gesteuertes System geschrieben wie folgt:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + v(t)\end{aligned}$$

Als weiterer Spezialfall wird das sogenannte **SiSo-System** betrachtet ( SiSo = „Single input, single output“). Bei diesem System sind die Steuerfunktion  $u(t)$  und  $y(t)$  Skalar. Dadurch werden die Matrizen  $C = c$ ,  $D = d$  und  $B = b$  als Vektoren geschrieben. Es folgt folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) + w(t) \\ y(t) &= c^T x(t) + du(t) + v(t)\end{aligned}$$

## 2.4 Dualität zwischen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Durch das Transponieren der Steuerbarkeits und Beobachtbarkeitsmatrizen lässt sich zeigen, dass die Steuerbarkeit (Beobachtbarkeit) des primalen Systemes

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

äquivalent zur Beobachtbarkeit (Steuerbarkeit) des dualen Systems ist.

$$\begin{aligned}\dot{x}_D(t) &= A^T x_D(t) + C^T u_D(t) \\ y_D(t) &= B^T x_D(t) + D^T u_D(t)\end{aligned}$$

Dies wird im folgenden Satz zusammengefasst.

**Satz 2.4.1.** *Das duale System ist genau dann beobachtbar (steuerbar), wenn das primale System steuerbar (beobachtbar) ist.*

### 3 Entwurf eines Beobachters

In diesem Entwurf eines Beobachters wird ein lineares und zeit invariantes gesteuertes System  $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + w(t)$  mit einer linearen Beobachtungsfunktion  $y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t)$  und einer Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  beobachtet. Kurz geschrieben als

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \quad x(t_0) = x_0$$

Die Durchgangsmatrix  $D = 0$ , da in unseren betrachteten Systemen keine direkte Verbindung zwischen der Beobachtungsfunktion und der Steuerung  $u(t)$  herrscht. Zunächst wird davon ausgegangen, dass das System ohne Störungen  $w(t) = 0$  und  $v(t) = 0$  betrachtet wird. Daraus ergibt sich folgende Kurzschreibweise.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad x(t_0) = x_0$$

In Abbildung 3 wird nun die Kernidee eines Beobachters veranschaulicht: Ein gesteuertes System  $x$ , wird durch die Steuerungsfunktion  $u$  angeregt und reagiert mit der Beobachtungsfunktion  $y$ . Parallel dazu wird nun ein Modell  $\hat{x}$  simuliert, welches mit der gleichen Steuerungsfunktion  $u$  beaufschlagt wird. Von diesem Modell wissen wir nun die Ausgänge  $\hat{y}$  und den Zustand  $\hat{x}$ . Somit haben wir Schätzwerte der Beobachtungsfunktion  $y$  und den Zuständen des gesteuerten Systemes  $x$ . Also ein Modell welches das gesteuerte System *beobachtet*.

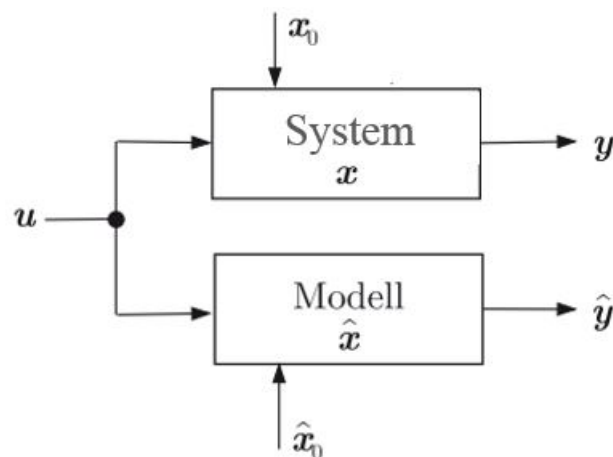


Abbildung 3: Parallel geschaltetes Modell zur bekannten Regelstrecke

Vergleichen wir nun das Beobachtungsmodell mit dem gesteuerten System, also die Differenz zwischen den Beobachtungsfunktionen  $y(t)$  und  $\hat{y}(t)$ , sowie den Zuständen  $x(t)$  und  $\hat{x}(t)$ . In der Regel sind die Anfangsbedingungen nicht kongruent  $x(t_0) = x_0 \neq \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ . Diese Differenz konvergiert nur asymptotisch gegen 0,

- wenn das Beobachtungsmodell das gesteuerte System genau abbildet,
- das gesteuerte System stabil ist und
- wenn es keine weiteren Störungen in dem gesteuerten System gibt.

Da in der Regel dies nicht der Fall ist, muss man die Abweichung der Beobachtungsfunktionen  $y(t)$  und  $\hat{y}(t)$  unserem Beobachtungsmodell in geeigneter Weise zurückführen. Somit kommen wir zu unserem ersten Beobachter.

## 4 Luenberger-Beobachter

### Herleitung des Luenberger-Beobachters

Zu dem gegebenen, linearen, zeit invarianten gesteuerten System mit einer Anfangsbedingung und Beobachtungsfunktion,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

wird nun folgendes Modell mit ebenfalls einer gegebenen Anfangsbedingung eingeführt:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t), & \hat{x}(t_0) &= \hat{x}_0 \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}$$

Nun soll die Abweichung der Beobachtungsfunktion und unserem Beobachtungsmodell dem System zurückgeführt werden. Dies wird realisiert, in dem wir an unser Modell eine weitere Funktion  $u_B(t)$  additiv hinzufügen.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + u_B(t) \\ &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)\end{aligned}$$

$L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist eine Matrix und beschreibt die Verstärkung der Abweichung zwischen  $y(t)$  und  $\hat{y}$ . Weiter wird diese Abweichung als Fehler  $e$  geschrieben. Leiten diesen nach der Zeit ab und setzen unsere Modellgleichungen ein.

$$\begin{aligned}e(t) &= x(t) - \hat{x}(t) \quad \Big| \quad \frac{d}{dt} \\ \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= A(t)x(t) + B(t)u(t) - (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ &= A(t)x(t) - (A - LC)\hat{x}(t) + LCx(t) \\ &= (A - LC)(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)e(t)\end{aligned}$$

Dieser Fehler entspricht mit der Anfangsbedingung  $e(t_0) = x(t_0) - \hat{x}(t_0) = x_0 - \hat{x}_0 = e_0$  einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad , e(t_0) = e_0$$

Der Beobachter arbeitet dann korrekt, wenn für beliebige Anfangsbedingung der Fehler für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert, also wenn  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$  gilt. Daraus schließt sich, dass die Matrix  $A - LC$  stabil sein muss, d.h alle Eigenwerte von  $A - LC$  müssen einen negativen Realteil haben. Dies kann durch Eigenwertplatzierung realisiert werden.



## Eigenwertplatzierung

In diesem Abschnitt wird sich auf eine Eigenwertplatzierung eines SiSo-Systemes beschränkt, d.h die Modellgleichung lässt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t)\end{aligned}$$

Daraus folgt als Beobachtungsmodell

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= (A - lc^T)\hat{x}(t) + bu(t) + ly(t) \\ \hat{y}(t) &= c^T \hat{x}\end{aligned}$$

und die gewöhnliche Differentialgleichung des Beobachterfehler

$$\dot{e}(t) = (A - lc^T)e(t)$$

## Berechnung mittel Beobachtungsnormalform

Eine besonders einfache Berechnungsvorschrift folgt, wenn unser System in Beobachtungsnormalform vorliegt, d.h mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad c^T = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1].$$

Ziel ist es das die Matrix  $\hat{A} = A - lc^T$  gewünschte Eigenwerte aufweist. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass die Eigenwerte von  $\hat{A}$  die selben sind wie von  $\hat{A}^T$ . Also folgt

$$\det(\hat{A}) = \det(A - lc^T) = \det(A^T - cl_B^T) = \det(\hat{A}^T).$$

Nun kann die Rückführung des Beobachters, die beschrieben wird durch den Vektor

$$l_B = \begin{bmatrix} l_{B,1} \\ l_{B,2} \\ \vdots \\ l_{B,n} \end{bmatrix}$$

gewählt werden, dass die Matrix

$$\hat{A} = A^T - cl_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 - l_1 & -a_1 - l_2 & -a_2 - l_3 & \cdots & -a_{n-1} - l_n \end{bmatrix}$$

die gewünschten, vorgegebenen Beobachtereigenwerte  $\lambda_i, (i = 1, \dots, n)$  aufweist. Nun werden die Koeffizienten  $\hat{a}_i$  des charakteristischen Polynoms aus den vorgegebenen Eigenwerten  $\lambda_i$  bestimmt. Daraus folgt mittels Koeffizientenvergleiches die Bestimmung des Vektore  $l$ :

$$l_B^T = [\hat{a}_0 \quad \hat{a}_1 \quad \cdots \quad \hat{a}_{n-1}] - [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}]$$

## Erweiterung auf beliebige Modellform

Liegt das System nicht in Regelungsnormalform, sondern in beliebiger Form vor, so muss man zunächst eine Zustandstransformation auf Beobachtungsnormalform durchführen.

$$x_B(t) = T_B^{-1} x(t)$$

Dazu bezeichnet  $x_B(t)$  eine Vektor in Beobachtungsnormalform und für die Transformationsmatrix  $T_B$  gilt:

$$T_B = \begin{bmatrix} s^T \\ s^T A \\ \vdots \\ s^T A^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

Der Zeilenvektor  $s^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] (B^T)^{-1}$  bezeichnet die letzte Zeile der inversen, transponierten Beobachtbarkeitsmatrix  $B$ . Nun wird eine Zustandsrückführung

$$u(t) = -l_B^T x_B(t) = -l_B^T T_B^{-1} x(t)$$

gewählt. Daraus folgt

$$u(t) = -l^T x(t)$$

und somit die Beziehung

$$l^T = l_B^T T_B^{-1} = \left( [\hat{a}_0 \ \hat{a}_1 \ \dots \ \hat{a}_{n-1}] - [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}] \right) T_B^{-1}$$

Aus einsetzen der Transformationsmatrix  $T_B$  folgt

$$l^T = [\hat{a}_0 \ \hat{a}_1 \ \dots \ \hat{a}_{n-1}] \begin{bmatrix} s^T \\ s^T A \\ \vdots \\ s^T A^{n-1} \end{bmatrix} - [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}] \begin{bmatrix} s^T \\ s^T A \\ \vdots \\ s^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Durch das Cayley-Hamilton-Theorem kann man den zweiten Ausdruck wie folgt schreiben

$$s^T (a_0 A^0 + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1}) = s^T (-A^n)$$

Setzt man dies ein, so folgt daraus die sogenannte „ACKERMANN-Formel“

$$l^T = [\hat{a}_0 \ \hat{a}_1 \ \dots \ \hat{a}_{n-1} \ 1] \begin{bmatrix} s^T \\ s^T A \\ \vdots \\ s^T A^{n-1} \\ s^T A^n \end{bmatrix} \\ = s^T (\hat{a}_0 \mathbb{1} + \hat{a}_1 A + \hat{a}_2 A^2 + \dots + \hat{a}_{n-1} A^{n-1} + A^n)$$

## 5 Kalman Filter

### Optimale Zustandsschätzung

Betrachtet wird erneut ein lineares und zeit invariantes gesteuertes System mit einer Beobachtungsfunktion. Beim Kalman-Filter werden die stochastischen Störungen des Systemrauschen  $w(t)$  und das Messrauschen  $v(t)$  mit berücksichtigt. Somit erweiter sich das Zustandsraummodell zu:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t)\end{aligned}$$

Die Interpretation von der unbekanntem  $v(t)$  ist ein Rauschen des System. Es wirkt additiv in der Beobachtungsfunktion auf den Zustand  $x(t)$ . Dieses Rauschen ist unerwünscht, da man den wahren Wert von  $x(t)$  aus der Beobachtungsfunktion erhalten möchte. Die unbekanntem  $w(t)$  wird als Störung des System interpretiert. Sie beeinflusst das gesteuerte System. Deshalb ist es von Interesse, die Wirkung von  $w(t)$  schnellst möglich zu erfassen.

Analog zum Beobachtungsfehler des Luenberger-Beobachters ergibt sich der Schätzfehler zu

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= (Ax(t) + Bu(t) + w(t)) - ((A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)) \\ &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) - (A - LC)\hat{x}(t) - Bu(t) - Ly(t) \\ &= Ax(t) + w(t) - (A - LC)\hat{x}(t) - Ly(t) \\ &= Ax(t) + w(t) - (A - LC)\hat{x}(t) - L(Cx(t) + v(t)) \\ &= (A - LC)(x(t) - \hat{x}(t)) + w(t) - Lv(t)\end{aligned}$$

Wie man sieht folgt, dass das Mess- und Systemrauschen den Schätzfehler ebenfalls zum Rauschen anregen.

Der Unterschied zum Luenberger-Beobachter ist, dass diesmal die optimale Rückführung  $L^*(t)$  für das gesteuerte System gesucht wird, die dann auch als Kalman-Verstärkung  $K$  bezeichnet wird. Also, eine Schätzung  $\hat{x}(t)$  von  $x(t)$  so zu finden, welche den mittleren quadratischen Fehler  $P(t)$  minimiert:

$$\begin{aligned}P(t) &= \text{Cov}(e(t), e(t)) \\ &= E(e(t)e(t)^T) \\ &= E((x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T) \\ &= \text{Spur}(E((x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T))\end{aligned}$$

Für den Anfangszustand  $x(t_0) = x_0$ , das Systemrauschen  $w(t)$  und Messrauschen  $v(t)$  werden folgende Bedingungen gefordert:

- der Erwartungswert vom Anfangszustand  $x_0$  ist bekannt  $E(x_0) = m_0$ , sowie die dazugehörige Kovarianzmatrix  $P_0 = E((x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T)$ .
- Das Messrauschen ist unverzerrt und normalverteilt mit Mittelwert gleich 0, also  $E(w(t)) = 0$  für alle  $t$ . Zudem ist er zeitlich unkorreliert, das heißt  $E(w(t)w(\tau)^T) = \text{Cov}(w(t), w(\tau)) = W(t)\delta(t - \tau)$ .
- das Selbe gilt für das Prozessrauschen  $v(t)$ , also  $E(v(t)) = 0$  für alle  $t$  und  $E(v(t)v(\tau)^T) = \text{Cov}(v(t), v(\tau)) = V(t)\delta(t - \tau)$ .
- die Matrizen  $W(t)$  und  $V(t)$  sind positiv definit

- das Messrauschen  $w(t)$  und  $v(t)$  Prozessrauschen sind unkorreliert,  $E(w(t)v(\tau)^T) = 0$ .
- das Messrauschen  $w(t)$  und  $v(t)$  Prozessrauschen korrelieren nicht mit einem vergangenen Zuständen von  $x(\tau)$  für  $t \geq \tau$ , d.h  $E(w(t)x(\tau)^T) = 0$  und  $E(v(t)x(\tau)^T) = 0$ .

### Herleitung der Optimalen Kalman-Verstärkung $K$

Wie bereits erwähnt, erhält man die Kalman-Verstärkung  $K$ , wenn sie so gewählt wird, dass der quadratische Mittelwert des Schätzfehler  $e(t)$  und somit seine Kovarianzmatrix

$$P(t) = \text{Cov}(e(t), e(t))$$

minimal wird. Durch die Annahme, dass die Matrizen  $W$  und  $V$  positiv definit sind und das gesteuertes System mit der Beobachtungsfunktion beobachtbar ist, wird nun das Minimum der Kovarianzmatrix  $P(t)$  gesucht. Nach Ableiten und einigen Rechenschritten:

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + W - \underbrace{P(t)C^T V^{-1} C P(t) + (L(t) - P(t)C^T V^{-1})V(L(t) - P(t)C^T V^{-1})^T}_{\geq 0}$$

$P(t)$  erreicht ein Minimum, wenn die optimale Rückführung  $L^*(t)$  bzw. Kalman-Verstärkung  $K(t)$  wie folgt gewählt ist

$$L^*(t) = K(t) = P(t)C^T V^{-1}$$

Daraus folgt für  $\dot{P}(t)$  eine Matrix-Riccati-Differentialgleichung:

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + W - P(t)C^T V^{-1} C P(t)$$

mit der Anfangsbedingung  $P(0) = P_0 = E(e(0)e(0)^T) = E(e_0 e_0^T)$ .

### Kontinuierliche Kalman-Filter

Durch die Wahl eines zeit-invarianten, beobachtbaren Systemes sind die Matrizen  $A$  und  $C$  zeit-invariant und beobachtbar. Ebenso setzen wir die Kovarianz-Matrizen  $W$  und  $V$  als zeit-invariant an. Dadurch konvergiert die Lösung der Matrix-Riccati-Differentialgleichung für beliebige, positive-semidefinite  $P(0)$  zu einer positiven semi-definiten konstanten Lösung  $P$ . Es folgt, dass die Ableitung wie bei einer Minimumsuche gleich Null gesetzt werden kann. Somit wird aus der Matrix-Riccati-Differentialgleichung eine algebraische Matrix-Riccati-Gleichung

$$0 = AP + PA^T + W - PC^T V^{-1} CP$$

und daraus folgt eine konstante Kalman-Verstärkung

$$K = PC^T V^{-1}$$

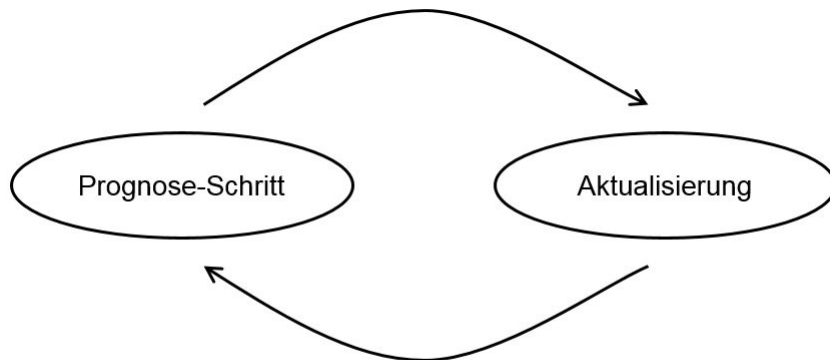
Die Matrix  $K$  wird auch Kalman-Gainmatrix bezeichnet.

## Kontinuierlich-Diskretes Kalman-Filter

Das Problem in der Praxis ist häufig, dass viele reale Systeme durch zeitkontinuierliche Modelle beschrieben werden, doch mit einer zeitdiskreten Beobachtungsfunktion  $y(t_k)$  gemessen werden. Das bedeutet, dass die Messung nicht kontinuierlich stattfindet, sondern in jedem Zeitintervall  $t_k$ . Daraus ergibt sich folgendes Modell:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t_k) &= Cx(t_k) + v(t_k)\end{aligned}$$

Die Idee ist es, eine Prognose des zeit-kontinuierlichen Modells in der Zeit bis zum Zeitpunkt der Messung durchzuführen und dann eine Aktualisierung („Update“) von der Kalman-Gainmatrix und des geschätzten Zustandes vorzunehmen.



Die Herleitung beginnt damit, die Zustände  $x(t)$  des gesteuerten System vom Zeitpunkt der  $t_{k-1}$  Messung bis zur nächsten  $t_k$  Messung zu prognostizieren. Somit folgt aus dem Beobachtungsmodell und der Matrix-Riccati-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= (A - L(t)C)\hat{x}(t) + Bu(t) + L(t)y(t) \\ &= A\hat{x}(t) + Bu(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) &= AP(t) + P(t)A^T + W - L(t)VL(t)^T \\ &= AP(t) + P(t)A^T + W\end{aligned}$$

da  $L(t) = 0 \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k]$  gilt. Nun wird folgende Notation eingeführt, bei der der erste Index den aktuellen Zeitpunkt und der zweite das vorhandene Wissen bis zum Zeitpunkt bezeichnet :

$$\hat{x}(t_{k-1}) = \hat{x}_{k-1|k-1}, \quad P(t_{k-1}) = P_{k-1|k-1}$$

Integration zum nächsten Zeitschritt  $t_k$  mit den Anfangsbedingungen  $\hat{x}_{k-1|k-1}$ ,  $P_{k-1|k-1}$  ergibt

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k-1} &= \hat{x}(t_k) \\ P_{k|k-1} &= P(t_k)\end{aligned}$$

Als nächstes wird die Aktualisierung folgen, denn in unserer Prognose von  $\hat{x}$  zum Zeitpunkt  $t_k$  bzw.  $\hat{x}_{k|k-1}$ , wird noch nicht die neueste Messung  $y_k$  bzw.  $y(t_k)$  berücksichtigt. Es folgt die Rückführmatrix  $L(t_k) = L_k$  so zu bestimmen, dass die korrigierte Kovarianzmatrix  $P_{k|k}$  optimal wird, also die Berechnung der Kalman-Gainmatrix  $K(t_k) = K_k$ .

Die korrigierte Schätzung  $\hat{x}_{k|k}$  ist definiert als Summe der Prognose  $\hat{x}_{k|k-1}$  und eines Korrekturterms  $i_k = i(t_k)$ . Üblicherweise wird dieser Korrekturterm als Innovation oder Residuum bezeichnet. Er beschreibt die Differenz zwischen der Messung  $y(t_k)$  und der Beobachtungsfunktion unseres Beobachtungsmodells zum Zeitpunkt  $t_k$  mit den vorhandenem Wissen von  $t_{k-1}$ .

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + L_k(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}) \\ &= \hat{x}_{k|k-1} + L_k(Cx_k + v_k - C\hat{x}_{k|k-1})\end{aligned}$$

Daraus folgt als Schätzfehler:

$$\begin{aligned}e_{k|k} &= x_k - \hat{x}_{k|k} \\ &= x_k - \hat{x}_{k|k-1} + L_k(Cx_k + v_k - C\hat{x}_{k|k-1}) \\ &= (\mathbb{1} - L_k C)(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) - L_k v_k \\ &= (\mathbb{1} - L_k C)e_{k|k-1} - L_k v_k\end{aligned}$$

Die zu minimierende Kovarianzmatrix sieht dann wie folgt aus, wobei nach Voraussetzung der Erwartungswert von  $v_k$  gleich null ist:

$$\begin{aligned}P_{k|k} &= E(e_{k|k}e_{k|k}^T) \\ &= E(((\mathbb{1} - L_k C)e_{k|k-1} - L_k v_k)((\mathbb{1} - L_k C)e_{k|k-1} - L_k v_k)^T) \\ &= E((\mathbb{1} - L_k C)e_{k|k-1}e_{k|k-1}^T(\mathbb{1} - L_k C)^T - L_k v_k e_{k|k-1}^T(\mathbb{1} - L_k C)^T \\ &\quad + E(L_k v_k v_k^T L_k^T - (\mathbb{1} - L_k C)e_{k|k-1} v_k^T L_k^T)) \\ &= (\mathbb{1} - L_k C)E(e_{k|k-1}e_{k|k-1}^T)(\mathbb{1} - L_k C)^T + L_k E(v_k v_k^T) L_k^T \\ &= (\mathbb{1} - L_k C)P_{k|k-1}E(\mathbb{1} - L_k C)^T + L_k V_k L_k^T \\ &= P_{k|k-1} - L_k C P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C^T L_k^T + L_k (C P_{k|k-1} C^T + V_t) L_k^T\end{aligned}$$

Um nun die gewünschte optimale Rückführung  $L_k^*$  bzw. die Kalman-Gainmatrix  $K_k$  zu erhalten, muss Analog zum kontinuierlichen Fall die Spur von  $P_{k|k}$  bezüglich  $L_k$  minimiert werden.

$$\frac{\partial}{\partial L_k} \stackrel{!}{=} 0$$

Dazu benötigen wir folgende Matrix-Identitäten. Die Matrizen  $A$  und  $X$  mit geeigneter Größe seien beliebig:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X} \text{Spur}(XAX^T) &= X(A^T + A), \\ \frac{\partial}{\partial X} \text{Spur}(XA) &= A^T \\ \frac{\partial}{\partial X} \text{Spur}(AX^T) &= A\end{aligned}$$

Mit diesen Matrix-Identitäten lässt sich das Minimierungsproblem wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial L_k} &= \frac{\partial}{\partial L_k} (P_{k|k-1} - L_k C P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C^T L_k^T + L_k (C P_{k|k-1} C^T + V_t) L_k^T) \\ &= -(C P_{k|k-1})^T - P_{k|k-1} C^T + L_k ((C P_{k|k-1} C^T + V_t)^T + (C P_{k|k-1} C^T + V_t)) \\ &= -P_{k|k-1}^T C^T - P_{k|k-1} C^T + L_k (C P_{k|k-1}^T C^T + V_t^T + C P_{k|k-1} C^T + V_t) \\ &= -P_{k|k-1} C^T - P_{k|k-1} C^T + L_k (C P_{k|k-1} C^T + V_t + C P_{k|k-1} C^T + V_t) \\ &= -2P_{k|k-1} C^T + 2L_k (C P_{k|k-1} C^T + V_t) = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_k = P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + V_t)^{-1} = K_k$$

Somit haben wir die gewünschte Form unserer Gainmatrix  $K_k$

$$K_k = P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + V_t)^{-1}$$

Durch Einsetzung der Gainmatrix in die Gleichung der Kovarianzmatrix  $P_{k|k}$  liefert die aktualisierte finale Form.

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= P_{k|k-1} - K_k C P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C^T K_k^T + K_k (C P_{k|k-1} C^T + V_t) K_k^T \\ &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + V_t)^{-1} C P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C^T (P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + V_t)^{-1})^T \\ &\quad + P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + V_t)^{-1} (C P_{k|k-1} C^T + V_t) (P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + V_t)^{-1})^T \\ &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + V_t)^{-1} C P_{k|k-1} \\ &= P_{k|k-1} - K_k C P_{k|k-1} \\ &= (\mathbb{1} - K_k C) P_{k|k-1} \end{aligned}$$

Somit erhält man schließlich die Gleichung für die Aktualisierung der Fehlerkovarianzmatrix  $P_{k|k}$ :

$$P_{k|k} = (\mathbb{1} - K_k C) P_{k|k-1}$$

Nun wurde die Prognose sowie die Aktualisierung eingeführt. In der Ab. 4 wird eine schematische Darstellung der einzelnen Schritte des kontinuierlich-diskretes Kalman-Filters gezeigt.

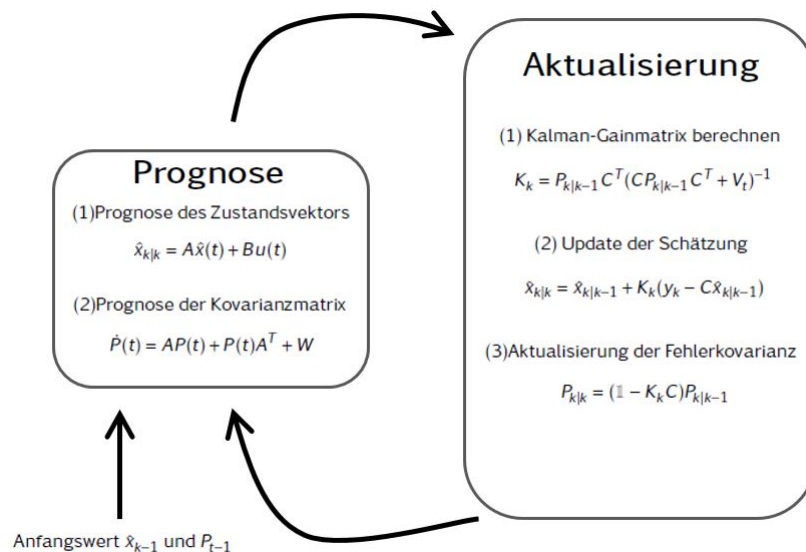


Abbildung 4: Schematische Darstellung des Algorithmus eines kontinuierlich-diskretes Kalman-Filters

## 6 Gedämpfter Harmonischer Oszillator

### System ohne System- und Messrauschen

In dieser Ausarbeitung wird die Beobachtung eines gedämpften harmonischen Oszillator durchgeführt. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + w_0^2 x(t) = 0$$

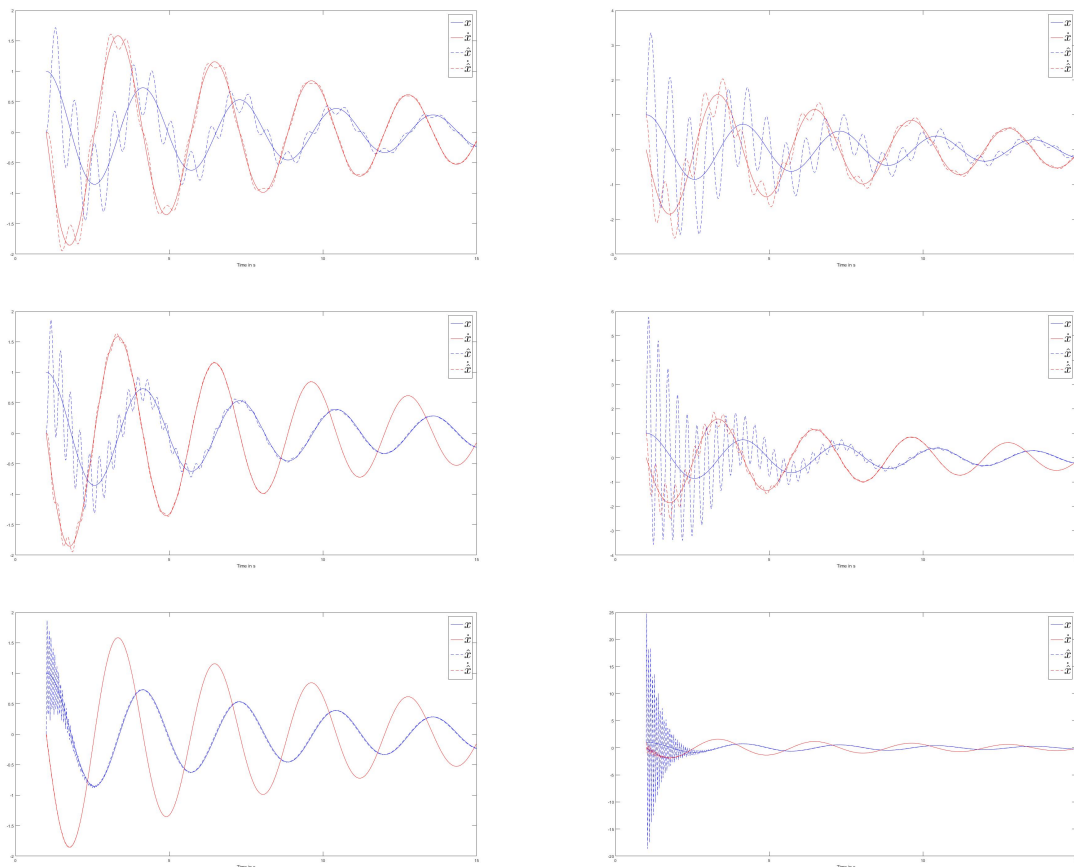
. Daraus folgt die Betrachtung folgendes Differentialgleichung-Systemes:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ w_0^2 & r \end{bmatrix} x(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Zunächst wird der Luenberger-Beobachter benutzt, da noch keine Störungen auf das System wirken. Durch den MATLAB-Befehl `acker(A', c, P)` kann die Rückführungsverstärkung  $l$  berechnet werden. Die Vektor  $P$  entspricht dabei, den gewünschten Eigenwerten.

Zu Veranschaulichung werden je Beobachtungen mit 2 verschiedenen Anfangswerten  $\hat{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$  (Linke Spalte) und  $\hat{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$  (Rechte Spalte), sowie 3 verschiedenen gesetzten Eigenwerten betrachte. In der Ersten Reihe haben beide Graphiken die Rückführungsverstärkung  $l = 5 \cdot \text{eig}(A)$ . In der Zweiten Reihe ist  $l = 10 \cdot \text{eig}(A)$  und in der dritten Reihe  $l = 50 \cdot \text{eig}(A)$ .



Wie sich leicht erkennen lässt konvergiert der Beobachter  $\hat{x}(t)$  umso schneller gegen  $x(t)$ , je höher die Rückführungsverstärkung gewählt wird. Selbst mit verschiedenen Anfangsbedingungen konvergiert er ebenfalls gegen unser System.



## System mit System- und Messrauschen

## 7 Fazit

## 8 Literatur

- Johannes Stauer, 2009, Diplomarbeit, Korrektur von Temperaturpunktprognose mit einem Kalmanfilter, 13-17, [http://www.univie.ac.at/img-wien/dipldiss/dipl/DA\\_Stauer.pdf](http://www.univie.ac.at/img-wien/dipldiss/dipl/DA_Stauer.pdf).
- Florian Bauer, 2013, Luenberger-Beobachter und Extended Kalman-Filter: Ein Vergleich, 4-12.