9. Übungsblatt zur Vorlesung Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Es seien z_0 und z_1 komplexe Zahlen und γ_{z_0,z_1} die gerichtete Strecke von z_0 nach z_1, etwa parametrisiert durch $\gamma_{z_0,z_1}(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ mit $t \in [0,1]$. Berechnen Sie folgende komplexe Wegintegrale

$$\int_{\gamma_{z_0,z_1}} f(z)\,dz$$

auf möglichst einfache Weise und geben Sie das Resultat in der Form $a + ib$ an:

a) $f(z) = z^2, \quad z_0 = 1 + i, \quad z_1 = 2 + i$

b) $f(z) = \cos z, \quad z_0 = -i, \quad z_1 = 1 + i$

c) $f(z) = e^z, \quad z_0 = \log 2, \quad z_1 = i\pi/2$

d) $f(z) = z\,e^z, \quad z_0 = -1 - i\pi/2, \quad z_1 = 2 + i\pi$

e) $f(z) = z\,\cos z, \quad z_0 = 0, \quad z_1 = i$

f) $f(z) = \mathrm{Log}(z), \quad z_0 = 1, \quad z_1 = 1 + i$

2.Aufgabe: Wir betrachten folgende einfach geschlossene, positiv orientierte Kurven in der komplexen Ebene: C_1 ist das Rechteck mit Eckpunkten 0, 2i, 2i-3, -3. C_2 ist das Dreieck mit Eckpunkten 0, 2, 2i. Und C_3 ist der Kreis mit Radius 3 mit Mittelpunkt bei 1-i. Skizzieren Sie C_1, C_2 und C_3 in der komplexen Ebene und berechnen Sie dann die Wegintegrale

$$\int_{C_1} f(z)\,dz\,, \qquad \int_{C_2} f(z)\,dz\,, \qquad \int_{C_3} f(z)\,dz$$

auf möglichst einfache Weise:

a) $f(z) = \frac{1}{z-z_0},\ z_0 = -2 + i$

b) $f(z) = \frac{z}{z-z_0},\ z_0 = 1 + i$

c) $f(z) = \frac{z}{(z-z_0)^2},\ z_0 = \frac{1-i}{2}$

d) $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^2},\ z_0 = \frac{1-i}{2}$

Geben Sie die Resultate in der Form $a + ib$ an.

..bitte wenden..

3.Aufgabe: Numerischer Test der Cauchy'schen Integralformel: Die Cauchy'sche Integralformel lautet:

$$f(z_0) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz \tag{1}$$

wobei C eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve in der komplexen Ebene ist, f ist komplex differenzierbar im Inneren von C und einer Umgebung des Randes und z_0 liegt im Inneren von C.

a) Finden Sie heraus, wie man in R benutzer-definierte Funktionen anlegen kann. Definieren Sie dann die Funktion $f(z) := e^{-z^2}$ in R und geben Sie ihr den Buchstaben `f`, dieser Buchstabe ist noch nicht verbraucht (der Buchstabe `t` etwa ist schon für das Transponieren von Matrizen verbraucht). Testen Sie Ihre Funktion, indem Sie den Befehl `f(1i)` eingeben. Als Resultat sollten Sie dann also die Eulersche Zahl, in komplexer Darstellung, `2.718282+0i`, bekommen.

b) Codieren Sie jetzt eine Funktion

```
TestCauchyInt = function( f , z0 , r )
```

die zwei Zahlen in einem Vektor zurückgibt: die erste Zahl soll das numerisch berechnete Integral (1) sein, wobei der Weg C ein Kreis mit Radius r um z_0 sein soll. Die zweite Zahl soll das exakte Resultat $f(z_0)$ sein. Sie können dazu etwa folgendes Code-Fragment als Vorlage benutzen:

```
# Wir wollen die Cauchy'sche Integralformel
# ueberpruefen: die Kurve C ist ein Kreis
# mit Radius r um z0:
# Die Funktion soll zwei Werte zurueckgeben,
# das Integral und f(z0):

TestCauchyInt = function( f , z0 , r )
{
  n = 10000
  phi = seq(from=0,to=2*pi,length=n)
  z =
  ...
  ...
  integral =  ...   * 1/(2*pi*1i)
  exact = ...
  result = c(integral,exact)
  names(result) = c("Integral","f(z0)")
  return(result)
}
```

Schauen Sie sich auch nochmal die Lösung der Aufgabe 3 vom letzten Übungblatt an, dort haben wir ja schon komplexe Wegintegrale numerisch berechnet. Ein Funktionsaufruf sollte dann in etwa folgendes Resultat produzieren:

```
> TestCauchyInt(f,z0=1i,r=2)
           Integral              f(z0)
2.718282-0.000854i 2.718282+0.000000i
> 
```