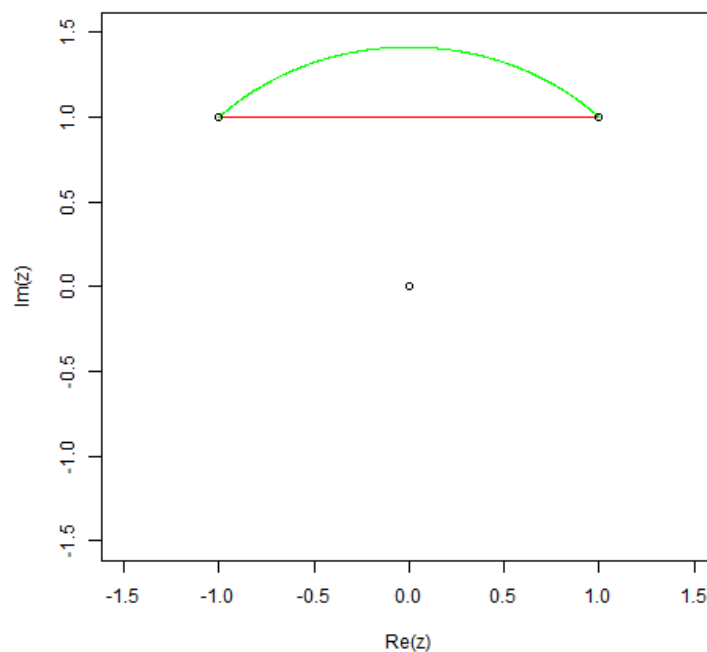


8. Übungsblatt zur Vorlesung Komplexe Funktionen

1. Aufgabe: Berechnen Sie das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz$$

für die beiden folgenden Wege:



Der rote Weg ist die gerichtete Strecke von $z_0 = 1 + i$ nach $z_1 = -1 + i$ und der grüne Weg ist der gerichtete Kreisbogen um den Ursprung von $z_0 = 1 + i$ nach $z_1 = -1 + i$.

2. Aufgabe: Berechnen Sie das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

für die beiden Wege, den roten und den grünen, aus Aufgabe 1, indem Sie

- die Wege parametrisieren und das komplexe Integral auf reelle Integrale zurückführen
- die Stammfunktion der Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ benutzen.

..bitte wenden..

3.Aufgabe: Starten Sie eine R-Session.

- a) Erzeugen Sie das Bild aus Aufgabe 1 mit dem roten Weg γ_{red} und dem grünen Weg γ_{green} .
- b) Mit dem folgenden Code können Sie numerisch das Integral $\int_{\gamma_{\text{red}}} z dz$ berechnen:

```
n = 1000
t = seq( from=0, to=1, length=n )
z = 1-2*t+1i
# quick check:
plot(z)          # looks good.

dz = diff(z)     # erzeugt den Vektor
                 # (z[2]-z[1], z[3]-z[2], ..., z[n]-z[n-1])
                 # der Laenge n-1

# wir wollen die Riemannsche Summe
# z[2]*(z[2]-z[1])
# + z[3]*(z[3]-z[2])
# + z[4]*(z[4]-z[3])
# + . . .
# + z[n]*(z[n]-z[n-1]) berechnen:

# wir entfernen das z[1] vom Vektor z:
zz = z[-1]      # hat jetzt Laenge n-1
# check:
length(z)
length(zz)
length(dz)
z
head(z)
head(zz)        # looks ok.

# und jetzt das Integral als Riemannsche Summe:
sum( zz * dz )  # -2i bis auf discretization-error O(1/n)
```

Eliminieren Sie sämtliche Code-Zeilen, die für die tatsächliche Berechnung des Integrals nicht benötigt werden, und berechnen Sie dann numerisch die Integrale aus Aufgabe 1 und 2,

$$\int_{\gamma_{\text{red}}} \bar{z} dz, \quad \int_{\gamma_{\text{green}}} \bar{z} dz, \quad \int_{\gamma_{\text{red}}} \frac{1}{z} dz, \quad \int_{\gamma_{\text{green}}} \frac{1}{z} dz .$$

4.Aufgabe: Es sei \sqrt{z} der sogenannte Hauptzweig der komplexen Wurzelfunktion, gegeben durch

$$\sqrt{z} = z^{1/2} := e^{\frac{1}{2}\text{Log}_{(-\pi, \pi]}(z)}$$

wobei $\text{Log}_{(-\pi, \pi]}(z)$ der Hauptzweig der komplexen Logarithmus-Funktion ist, mit Imaginärteil in $(-\pi, \pi]$. Weiter seien K_r^\pm die beiden Kreisbögen um den Ursprung mit Radius r , die

$$\begin{aligned} \text{für } K_r^+ : & \text{ von } z_0 = r \text{ über } ir \text{ nach } z_{1,+} = re^{i(\pi-\varepsilon)} \\ \text{für } K_r^- : & \text{ von } z_0 = r \text{ über } -ir \text{ nach } z_{1,-} = re^{i(\pi+\varepsilon)} \end{aligned}$$

verlaufen. Berechnen Sie die komplexen Wegintegrale

$$\int_{K_r^\pm} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$$

für die beiden Wege K_r^\pm im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$, indem Sie

- a) die Wege parametrisieren und das komplexe Integral auf reelle Integrale zurückführen
- b) die Stammfunktion der Funktion $f(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ benutzen.