Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Bestimmen Sie den Konvergenzradius von folgenden Potenzreihen, $z \in \mathbb{C}$:

a) $f(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$

b) $f(z) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$

c) $f(z) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \, z^n$

d) $f(z) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n!} \, z^n$

2.Aufgabe: Der Sinus und der Kosinus für komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$ sind definiert durch die Potenzreihenentwicklungen

$$\sin(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius von diesen Potenzreihen.

b) Zeigen Sie durch gliedweises Differenzieren:

$$\frac{d}{dz}\big[\sin(z)\big] \;=\; \cos(z) \qquad \frac{d}{dz}\big[\cos(z)\big] \;=\; -\sin(z)$$

c) Beweisen Sie: Für jedes komplexe $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{iz} \;=\; \cos(z) + i \sin(z) \; .$$

Insbesondere haben wir die Darstellungen

$$\sin(z) \;=\; \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos(z) \;=\; \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

..bitte wenden..

d) Zeigen Sie: Für $z = x + iy$ ist die Zerlegung in Real- und Imaginärteil gegeben durch

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sin(x+iy) &&= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \cos(z) &= \cos(x+iy) &&= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{aligned}$$

mit den Hyperbel-Funktionen $\sinh y = (e^y - e^{-y})/2$, $\cosh y = (e^y + e^{-y})/2$.

e) Für jedes komplexe $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\sin^2 z + \cos^2 z \;=\; 1 \;.$$

f) Es gelten die Additionstheoreme $(z, w \in \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \sin w \cos z \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \;, \end{aligned}$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} \sin(2z) &= 2 \sin z \cos z \\ \cos(2z) &= \cos^2 z - \sin^2 z \;. \end{aligned}$$

3.Aufgabe: Berechnen Sie für die Reihen aus Aufgabe 1 vom Übungsblatt 5,

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2+i}\right)^n$

die Werte der Reihen numerisch mit Hilfe der R-Software, indem Sie die erstem 100 Terme aufsummieren.

4.Aufgabe: Untersuchen Sie die folgenden Reihen aus Aufgabe 2 vom Übungsblatt 5,

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{n^2 5^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1-i)^n}$

auf Konvergenz, indem Sie mit der R-Software die Folge der ersten 100 Partialsummen in der komplexen Ebene plotten. Benutzen Sie dazu die `cumsum()`-Funktion.