Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2016/17

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: **a)** Es sei $f(z) = \frac{1}{z}$. Berechnen Sie die komplexe Ableitung von f, indem Sie die Definition der Ableitung mit dem Differenzenquotienten benutzen.
b) Es sei $f(z) = \frac{1}{z^n}$ wobei $n \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl ist. Berechnen Sie die komplexe Ableitung von f, indem Sie die Definition der Ableitung mit dem Differenzenquotienten benutzen.

2.Aufgabe: Es seien f und g zwei komplex differenzierbare Funktionen. Wie lautet die Quotientenregel zum Ableiten von $\frac{f(z)}{g(z)}$? Beweisen Sie die Quotientenregel mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel und dem Resultat aus Aufgabe 1a.

3.Aufgabe: Berechnen Sie die komplexe Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der Standard-Ableitungsregeln:

a) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

b) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$

c) $f(z) = \frac{z-z^2}{z^3-z^4}$

d) $f(z) = z^k(1-z^2)^\ell(1+z^2)^m$ wobei k, ℓ und m natürliche Zahlen sind.

4.Aufgabe: Zeigen Sie, dass folgende Funktionen $u(x,y)$ harmonisch sind und bestimmen Sie jeweils ein harmonisch konjugiertes $v(x,y)$:

a) $u(x,y) = e^{-y}\cos x$

b) $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

Können Sie jeweils die komplexe Funktion $f(z) = f(x+iy)$ angeben, so dass $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ ist?

5.Aufgabe: **a)** Es seien $u_1(x,y) = x^2 - y^2$ und $u_2(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Zeigen Sie, dass u_1 und u_2 harmonisch sind, das Produkt $u_1 \cdot u_2$ ist jedoch nicht harmonisch.
b) Es seien $u(x,y)$ und $v(x,y)$ zwei harmonische Funktionen und v sei harmonisch konjugiert zu u. Beweisen Sie: Dann ist das Produkt $u \cdot v$ ebenfalls wieder harmonisch.