Hochschule RheinMain WS 2016/17
Prof. Dr. D. Lehmann

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: **a)** Es seien $w, z \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie folgende Formel:

$$\begin{aligned} \frac{z^n - w^n}{z - w} &= z^{n-1} + z^{n-2}w + z^{n-3}w^2 + \cdots + z\,w^{n-2} + w^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} . \end{aligned}$$

b) Beweisen Sie: Die Funktion $f(z) = z^n$ ist komplex differenzierbar und es gilt

$$f'(z) = n\,z^{n-1} .$$

2.Aufgabe: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) \in \mathbb{R}$ eine beliebig oft reell-differenzierbare Funktion. Wir definieren $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$z = x + iy \to h(z) := f(x)$$

Ist dieses h komplex differenzierbar?

3.Aufgabe: Es seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei komplex differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie:

a) Das Produkt fg ist komplex differenzierbar und es gilt die übliche Produktregel

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

b) Die Hintereinanderschaltung $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ ist komplex differenzierbar und es gilt die übliche Kettenregel

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))\,g'(z)$$

Die Beweise können Sie direkt aus dem Reellen, aus der Analysis 1, übertragen.

..bitte wenden..

4.Aufgabe: Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Funktionen und zeigen Sie, dass sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen:

a) $f(z) \;=\; e^z \;=\; e^{x+iy} \;=\; e^x\, e^{iy}$

b) $f(z) \;=\; \frac{1}{z} \;=\; \frac{1}{x+iy}$

5.Aufgabe: Welche der folgenden Funktionen f sind komplex differenzierbar?

a) $f(z) \;=\; |z|^2$

b) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

c) $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$

Dabei sei $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.