

**13. Übungsblatt zur Vorlesung
Komplexe Funktionen
(Probe-Klausur)**

Theorie-Teil: Aufgaben 1-6: 40 Punkte

Programmier-Teil: Aufgaben 7-9: 20 Punkte

1. Aufgabe (6 Punkte): Elementare Rechenregeln:

- a) Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a + ib$ mit geeignetem Realteil a und Imaginärteil b :

$$\mathbf{a1)} \quad \frac{1}{i^{55}} \qquad \mathbf{a2)} \quad (2 - i)^3 \qquad \mathbf{a3)} \quad e^{-5\pi i}$$

- b) Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in Polardarstellung $re^{i\varphi}$ mit geeignetem Radius r und Winkel φ :

$$\mathbf{b1)} \quad (i + 1)^4 \qquad \mathbf{b2)} \quad \frac{1}{2 - 2i} \qquad \mathbf{b3)} \quad \frac{2}{1 - i\sqrt{3}}$$

2. Aufgabe (6 Punkte): Komplexe Differenzierbarkeit:

- a) Es sei $f(z) = f(x + iy) = x^2 + iy^2$. Ist dieses f komplex differenzierbar an der Stelle $z_0 = 1 - 2i$?
- b) Es sei $u(x, y) = x^2 - 2y$. Kann dieses u der Realteil einer komplex-differenzierbaren Funktion sein?

3. Aufgabe (6 Punkte): Reihen:

- a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{4}\right)^n$
- b) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2i)^n}$ konvergent oder divergent?
- c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

4.Aufgabe (6Punkte): Elementare Funktionen:

- a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $\operatorname{Log}_{(-\pi, \pi]}(2i)$
- b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right)$

5.Aufgabe (8Punkte): Weg-Integrale:

- a) Es sei $\gamma_{[1-i, 1+i]}$ die gerichtete Strecke in der komplexen Ebene, die von $1 - i$ nach $1 + i$ geht. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_{[1-i, 1+i]}} \bar{z}^2 dz$$

wobei \bar{z} das komplex konjugierte von z ist.

- b) Es sei $K_{1-i, 1+i}(0)$ der gerichtete Kreisbogen um 0 mit Radius $\sqrt{2}$, der von $1 - i$ nach $1 + i$ geht. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{K_{1-i, 1+i}(0)} z dz .$$

6.Aufgabe (8Punkte): Residuensatz: Berechnen Sie folgendes trigonometrisches Integral mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 2 \cos \theta}$$

Programmier-Teil: Aufgaben 7-9: 20 Punkte

7.Aufgabe (6Punkte): Lösen Sie die 1.Aufgabe numerisch in R.

8.Aufgabe (6Punkte): Erstellen Sie einen Plot, in dem die Strecke $\gamma_{[1-i, 1+i]}$ aus Aufgabe 5a in rot dargestellt ist und der Kreisbogen $K_{1-i, 1+i}(0)$ in blau, in demselben Diagramm.

9.Aufgabe (8Punkte): Berechnen Sie das Integral aus Aufgabe 5b,

$$\int_{K_{1-i, 1+i}(0)} z dz$$

numerisch mit Hilfe einer R-Simulation. Wählen Sie etwa $n = 100000$ Terme für die Riemannsche Summe.