

12. Übungsblatt zur Vorlesung Komplexe Funktionen

1. Aufgabe: Es sei $C_r^+(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ der positiv orientierte Kreis um z_0 mit Radius r . Berechnen Sie folgendes Wegintegral

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$$

mit Hilfe des Residuensatzes für folgende geschlossene Wege C :

a) $C = C_1^+(1)$

b) $C = C_4^+(0)$

Überprüfen Sie Ihre Resultate durch eine geeignete R-Simulation.

2. Aufgabe: Berechnen Sie die folgenden reellen Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

Überprüfen Sie Ihre Resultate durch eine geeignete R-Simulation.

3. Aufgabe: Bestimmen Sie die Residuen $a_{-1}(f, z_0 = 0)$ für folgende Funktionen f :

a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$

b) $f(z) = \frac{z^2+4z+5}{z^2+z}$

c) $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$

d) $f(z) = \frac{e^{2z}-1}{\sin^2 z}$

4. Aufgabe: Überprüfen Sie die Resultate aus Aufgabe 3 numerisch mit Hilfe einer R-Simulation, indem Sie die Integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon^+(0)} f(z) dz = a_{-1}(f, z_0 = 0) \quad (1)$$

auf der linken Seite von Formel (1) numerisch berechnen (für ε hinreichend klein – wieso hinreichend klein?).