Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2016/17

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Es bezeichne $C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ den positiv orientierten Kreis mit Radius r um z_0. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel:

a) $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{\sin z}{z}\,dz$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{\sin z}{z^2}\,dz$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{\sin z}{z^3}\,dz$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{\sin z}{z^4}\,dz$

b) $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{1}{z\cos z}\,dz$

c) $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(1)} \frac{1}{1-z^2}\,dz$

d) $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(1)} \frac{1}{(1-z^2)^2}\,dz$

e) $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2(1)} \frac{\sqrt{4+z}}{z}\,dz$, mit dem Hauptzweig der Wurzel-Funktion.

f) $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(3i/2)} \frac{\mathrm{Log}(z)}{z-i}\,dz$, mit dem Hauptzweig der Logarithmus-Funktion.

2.Aufgabe: Berechnen Sie alle Integrale aus Aufgabe 1 numerisch mit Hilfe einer geeigneten R-Simulation. Schauen Sie sich dazu etwa noch einmal den Code von Aufgabe 3, Blatt 8 und Aufgabe 3, Blatt 9 an.

3.Aufgabe: Es sei

$$f(z) \;=\; \frac{1}{1-z}$$

a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von f um den Entwicklungspunkt $z_0 = i$ mit Hilfe der geometrischen Reihe.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $z_0 = i$, indem Sie also die Ableitungen von f an der Stelle $z_0 = i$ berechnen und dann die Taylorreihe hinschreiben.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe mit Hilfe einer geeigneten Formel für den Konvergenzradius. Dieser sollte identisch sein mit dem Abstand von z_0 zur nächstgelegenen Polstelle von f, wie gross ist dieser Abstand?

..bitte wenden..

4.Aufgabe: In der Analysis 1 dient die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

als Standard-Beispiel für eine beliebig oft differenzierbare Funktion, deren Taylorreihe konvergiert, aber nicht notwendig mit $f(x)$ übereinstimmen muss. Es sind nämlich alle Ableitungen $f^{(k)}(0)$ an der Stelle $x_0 = 0$ gleich Null, also die Taylorreihe um $x_0 = 0$ ist einfach die Nullfunktion mit Konvergenzradius $r = \infty$, aber das f ist offensichtlich in jeder Umgebung von $x_0 = 0$ ungleich Null.

Wenn wir jetzt definieren $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$h(z) \quad := \quad \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} & \text{falls } z \neq 0 \\ 0 & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

wieso ist das dann kein Gegenbeispiel zu dem Satz aus der Vorlesung, der sagt, dass jede in einer Umgebung von z_0 komplex differenzierbare Funktion dort auch beliebig oft komplex differentierbar ist, und dass die Taylorreihe von h dann automatisch mit h übereinstimmen muss?

Wenn Sie keine Idee haben (oder wenn Sie einfach Lust haben, mal ein Bild zu machen..), könnten Sie etwa versuchen, einen R-Plot zu machen, der den Betrag $|h(z)|$ von h über der komplexen Ebene zeigt. Sie müssten dazu einen geeigneten 3D-Plot-Befehl raussuchen oder etwa Höhenlinien machen, da könnte man den `Contour()`-Befehl nehmen.