Hochschule RheinMain WS 2016/17
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen 9. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Alle angegebenen Funktionen sind in einer Umgebung von γ_{z_0,z_1} komplex differenzierbar, so dass alle Integrale gemäss

$$\int_{\gamma_{z_0,z_1}} f(z)\,dz \;=\; F(z_1) \;-\; F(z_0)$$

berechnet werden können, wobei F eine Stammfunktion von f ist, also $F'(z) = f(z)$ in einer Umgebung von γ_{z_0,z_1}.

a) $f(z) = z^2, \quad z_0 = 1 + i, \quad z_1 = 2 + i \;\Rightarrow\; F(z) = z^3/3$ und damit

$$\begin{aligned} F(z_1) \;-\; F(z_0) &= \frac{1}{3}\Big[(2+i)^3 - (1+i)^3\Big] \\ &= \frac{1}{3}\Big[8 + 3\times 4i + 3\times 2(-1) - i - [1 + 3i + 3(-1) - i]\Big] \\ &= \frac{1}{3}\Big[8 + 12i - 6 - i - 1 - 3i + 3 + i\Big] \\ &= \frac{4+9i}{3} \end{aligned}$$

b) $f(z) = \cos z, \quad z_0 = -i, \quad z_1 = 1 + i \;\Rightarrow\; F(z) = \sin z$ und damit

$$\begin{aligned} F(z_1) \;-\; F(z_0) &= \sin(1+i) - \sin(-i) \\ &\overset{\text{Blatt6,Aufg2d}}{=} \sin 1 \cosh 1 + i \sinh 1 \cos 1 + \sin i \\ &= \sin 1 \cosh 1 + i[\sinh 1 \cos 1 + \sinh 1] \end{aligned}$$

c) $f(z) = e^z, \quad z_0 = \log 2, \quad z_1 = i\pi/2 \;\Rightarrow\; F(z) = e^z$ und damit

$$F(z_1) \;-\; F(z_0) \;=\; e^{i\pi/2} - e^{\log 2} \;=\; i - 2$$

d) $f(z) = z\,e^z, \quad z_0 = -1 - i\pi/2, \quad z_1 = 2 + i\pi$:

Da für komplexe Funktionen ebenfalls die Produktregel gilt, gilt auch die Umkehrung davon, $f(z)g(z) = \int f'(z)g(z)dz + \int f(z)g'(z)dz$, so dass wir eine Stammfunktion mit partieller Integration finden können:

$$\int ze^z dz \;=\; ze^z - \int 1e^z \;=\; ze^z - e^z \;=\; (z-1)e^z \;=:\; F(z)$$

Damit:

$$\begin{aligned} F(z_1) \;-\; F(z_0) &= (1+i\pi)e^{2+i\pi} - (-2 - i\pi/2)e^{-1-i\pi/2} \\ &= -(1+i\pi)e^2 + i(-2 - i\pi/2)e^{-1} \\ &= -e^2 + \tfrac{\pi}{2e} - i[\pi e^2 + 2/e] \end{aligned}$$

e) $f(z) = z\,\cos z, \quad z_0 = 0, \quad z_1 = i$

$$\int z\cos z dz \;=\; z\sin z - \int 1\sin z \;=\; z\sin z + \cos z \;=\; F(z)$$

und damit

$$\begin{aligned} F(z_1) \;-\; F(z_0) \;&=\; i\sin i + \cos i - \cos 0 \\ &=\; -\sinh 1 + \cosh 1 - 1 \;=\; e^{-1} - 1 \end{aligned}$$

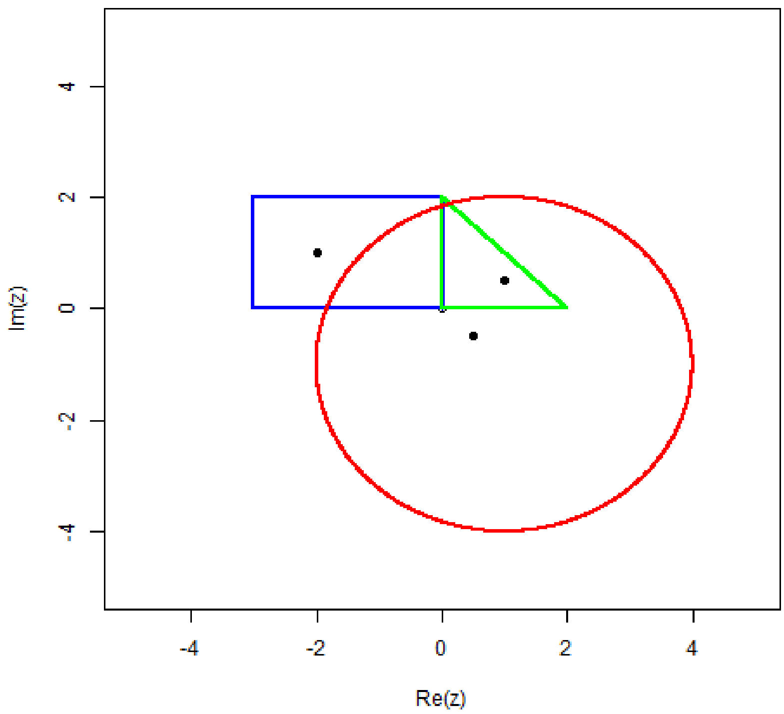
f) $f(z) = \mathrm{Log}(z), \quad z_0 = 1, \quad z_1 = 1+i$

$$\int 1\mathrm{Log}(z)dz \;=\; z\mathrm{Log}(z) - \int z\,\tfrac{1}{z}\,dz \;=\; z\mathrm{Log}(z) - z \;=\; F(z)$$

und damit

$$\begin{aligned} F(z_1) \;-\; F(z_0) \;&=\; (1+i)\mathrm{Log}(1+i) - 1 - i - [\mathrm{Log}(1) - 1] \\ &=\; (1+i)[\log\sqrt{2} + i\tfrac{\pi}{4}] - 1 - i + 1 \\ &=\; \log\sqrt{2} - \pi/4 + i[\log\sqrt{2} + \pi/4 - 1] \end{aligned}$$

2.Aufgabe: Das z_0 in Teil (b) sollte nicht auf dem Rand von C_2 liegen, es sollte $z_0 = 1+i/2$ sein für das z_0 in (b). Man erhält dann folgendes Bild:



Wir benutzen folgende Reultate aus der Vorlesung: Es sei C eine einfache geschlossene Kurve. Dann:

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} \;=\; \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } z_0 \text{ im Inneren von } C \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^2} \;=\; 0$$

egal ob z_0 im Inneren oder ausserhalb von C liegt. Weiterhin ist $\int_C f(z)dz = 0$ falls f im Inneren von C komplex diffbar ist, also keine Pole innerhalb von C liegen. Damit erhalten wir

a) $z_0 = -2 + i$ liegt im Inneren von C_1, aber ausserhalb von C_2 und C_3. Also

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z-z_0} \;=\; \int_{C_3} \frac{dz}{z-z_0} \;=\; 0$$

und

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-z_0} \;=\; 2\pi i$$

b) $z_0 = 1 + i/2$ liegt im Inneren von C_2 und C_3, aber ausserhalb von C_1. Also

$$\int_{C_1} \frac{z\,dz}{z-z_0} \;=\; 0$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{C_{2,3}} \frac{z\,dz}{z-z_0} \;&=\; \int_{C_{2,3}} \frac{(z-z_0+z_0)\,dz}{z-z_0} \\
&=\; \int_{C_{2,3}} dz \;+\; z_0 \int_{C_{2,3}} \frac{dz}{z-z_0} \\
&=\; 0 \;+\; 2\pi i\, z_0 \;=\; 2\pi i - \pi
\end{aligned}$$

c) $z_0 = \frac{1-i}{2}$ liegt innerhalb von C_3, aber ausserhalb von C_1 und C_2. Also

$$\int_{C_1} \frac{zdz}{(z-z_0)^2} \;=\; \int_{C_2} \frac{zdz}{(z-z_0)^2} \;=\; 0$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} \frac{zdz}{(z-z_0)^2} \;&=\; \int_{C_3} \frac{(z-z_0+z_0)dz}{(z-z_0)^2} \\
&=\; \int_{C_3} \frac{dz}{z-z_0} \;+\; z_0 \int_{C_3} \frac{dz}{(z-z_0)^2} \\
&=\; 2\pi i
\end{aligned}$$

d) Das Integral

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^2} \;=\; 0$$

egal, ob z_0 im Inneren oder ausserhalb von C liegt (sollte nur nicht auf C liegen).