Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2016/17

Lösungen 8. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Wir parametrisieren die Wege:

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{red}}(t) &= z_0 + t(z_1 - z_0) = 1 + i + t(-1 + i - 1 - i) = 1 + i - 2t\,, \quad t \in [0,1] \\ \gamma_{\text{green}}(\varphi) &= \sqrt{2}\,e^{i\varphi}\,, \quad \varphi \in \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}\right]\end{aligned}$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned}\gamma'_{\text{red}}(t) &= z_1 - z_0 = -2 \\ \gamma'_{\text{green}}(\varphi) &= i\sqrt{2}\,e^{i\varphi}\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{\text{red}}} \bar{z}\,dz &= \int_0^1 \overline{\gamma_{\text{red}}(t)}\gamma'_{\text{red}}(t)dt \\ &= \int_0^1 (1 - i - 2t)(-2)dt = 2i\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{\text{green}}} \bar{z}\,dz &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \overline{\gamma_{\text{green}}(\varphi)}\gamma'_{\text{green}}(\varphi)d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}\,e^{-i\varphi}\,i\sqrt{2}\,e^{i\varphi}\,d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2i\,d\varphi = i\,\pi\end{aligned}$$

2.Aufgabe: **a)** Mit den Parametrisierungen aus Aufgabe 1 bekommen wir:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{\text{red}}} \frac{1}{z}\,dz &= \int_0^1 \frac{1}{\gamma_{\text{red}}(t)} \times \gamma'_{\text{red}}(t)dt \\ &= \int_0^1 \frac{-2}{1 - 2t + i}\,dt \\ &= -2\int_0^1 \frac{1 - 2t - i}{(1 - 2t)^2 + 1}\,dt \\ &= -2\int_0^1 \frac{1 - 2t}{(1 - 2t)^2 + 1}\,dt \;+\; 2i\int_0^1 \frac{1}{(1 - 2t)^2 + 1}\,dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\log[(1-2t)^2+1]\Big|_0^1 \;-\; i\arctan[1-2t]\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\big\{\log 2 - \log 2\big\} - i\big\{\arctan[-1] - \arctan[1]\big\} \\
&= -i\big\{-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\big\} \;=\; i\,\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_{\text{green}}} \frac{dz}{z} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\gamma'_{\text{green}}(\varphi)}{\gamma_{\text{green}}(\varphi)}\,d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{i\sqrt{2}\,e^{i\varphi}}{\sqrt{2}\,e^{i\varphi}}\,d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} i\,d\varphi \;=\; i\,\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

b) Als Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z}$ können wir hier etwa den Logarithmus benutzen, der auf der negativen reellen Achse einen Sprung um 2π macht, also den Hauptzweig des Logarithmus

$$
F(z) \;=\; \mathrm{Log}(z) \;:=\; \mathrm{Log}_{(-\pi,\pi)}(z)
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 1+i &&= \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \\
z_1 &= -1+i &&= \sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}
\end{aligned}
$$

haben wir dann

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_{\text{red/green}}} \frac{dz}{z} &= \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz \\
&= F(z)\big|_{z_0}^{z_1} \;=\; F(z_1) - F(z_0) \\
&= \mathrm{Log}(\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}) \;-\; \mathrm{Log}(\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}) \\
&= \log(\sqrt{2}) + i3\pi/4 - \log(\sqrt{2}) - i\pi/4 \;=\; i\pi/2\;.
\end{aligned}
$$

4.Aufgabe: **a)** Wir parametrisieren die Wege

$$
\begin{aligned}
\gamma_+(t) &= r\,e^{i\varphi}\,, \quad \varphi \in [0, \pi-\varepsilon] \\
\gamma_-(t) &= r\,e^{-i\varphi}\,, \quad \varphi \in [0, \pi-\varepsilon]
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\gamma_+(t)} &= \sqrt{r}\,e^{i\varphi/2} \\
\sqrt{\gamma_-(t)} &= \sqrt{r}\,e^{-i\varphi/2}
\end{aligned}
$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int_{K_r^+} \frac{1}{2\sqrt{z}}\,dz &= \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{ir\,e^{i\varphi}}{2\sqrt{r}\,e^{i\varphi/2}}\,d\varphi \\
&= \frac{i\sqrt{r}}{2}\int_0^{\pi-\varepsilon} e^{i\varphi/2}\,d\varphi \\
&\overset{\varepsilon\to 0}{\to} \frac{i\sqrt{r}}{2}\int_0^{\pi} e^{i\varphi/2}\,d\varphi \\
&= \frac{i\sqrt{r}}{2}\,\frac{2}{i}\,e^{i\varphi/2}\Big|_0^{\pi} \\
&= \sqrt{r}\,(i-1)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{K_r^-} \frac{1}{2\sqrt{z}}\,dz &= \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{-ir\,e^{-i\varphi}}{2\sqrt{r}\,e^{-i\varphi/2}}\,d\varphi \\
&= -\frac{i\sqrt{r}}{2}\int_0^{\pi-\varepsilon} e^{-i\varphi/2}\,d\varphi \\
&\overset{\varepsilon\to 0}{\to} -\frac{i\sqrt{r}}{2}\int_0^{\pi} e^{-i\varphi/2}\,d\varphi \\
&= -\frac{i\sqrt{r}}{2}\left(-\frac{2}{i}\right) e^{-i\varphi/2}\Big|_0^{\pi} \\
&= \sqrt{r}\,(-i-1)
\end{aligned}$$

b) Wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{z_0}}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{z_0}}{z-z_0}\,\frac{\sqrt{z}+\sqrt{z_0}}{\sqrt{z}+\sqrt{z_0}} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{\sqrt{z}^2-\sqrt{z_0}^2}{z-z_0}\,\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{z_0}} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{z_0}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{z_0}}
\end{aligned}$$

gilt für jede komplexe Wurzelfunktion $\frac{d}{dz}\sqrt{z} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ für alle z, an denen die Wurzelfunktion keinen Sprung hat. Also

$$\begin{aligned}
\int_{K_r^+} \frac{1}{2\sqrt{z}}\,dz &= \sqrt{z}\Big|_r^{z_{1,+}} \\
&= \sqrt{re^{i(\pi-\varepsilon)}} - \sqrt{r} \\
&\overset{\varepsilon\to 0}{\to} \sqrt{r}\,e^{i\pi/2} - \sqrt{r} \;=\; \sqrt{r}(i-1)
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\int_{K_r^-} \frac{1}{2\sqrt{z}}\, dz &= \sqrt{z}\Big|_r^{z_{1,-}} \\
&= \sqrt{re^{i(\pi+\varepsilon)}} - \sqrt{r} \\
&= \sqrt{re^{-i(-\pi-\varepsilon)}} - \sqrt{r} \\
&= \sqrt{re^{-i(-\pi-\varepsilon)-2\pi\, i}} - \sqrt{r} \\
&= \sqrt{re^{-i(\pi-\varepsilon)}} - \sqrt{r} \\
&\overset{\varepsilon\to 0}{\to} \sqrt{r}\, e^{-i\pi/2} - \sqrt{r} \;=\; \sqrt{r}(-i-1)\ .
\end{aligned}
$$