Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2016/17

Lösungen 6. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Wir verwenden die Formeln

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad \text{oder} \tag{1}$$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}} \tag{2}$$

a) Es ist $c_n = \frac{1}{3^n}$, $\sqrt[n]{|c_n|} = 1/3$ und damit $\rho = 3$.

b) Es ist $c_n = \frac{1}{n^3}$, $\sqrt[n]{|c_n|} = 1/\sqrt[n]{n^3} = 1/\sqrt[n]{n}^3 \to 1/1^3 = 1$ und damit $\rho = 1$.

c) Es ist $c_n = n^3$, $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{n^3} = \sqrt[n]{n}^3 \to 1^3 = 1$ und damit $\rho = 1$.

d) Es ist $c_n = \sqrt{n!}$, $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \sqrt{\frac{(n+1)!}{n!}} = \sqrt{n+1} \to \infty$ und damit $\rho = 1/\infty = 0$.

2.Aufgabe: **a)** Für den Sinus haben wir

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 2k \text{ gerade} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & \text{falls } n = 2k+1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

und für den Cosinus ist

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} = \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} & \text{falls } n = 2k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n = 2k+1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

so dass in beiden Fällen $|c_n| \le 1/n!$ gilt, also ist $e^{|z|} = \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n/n!$ in beiden Fällen eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Majorante, also $\rho = \infty$ für beide Reihen.

b) Mit gliedweisem Differenzieren bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\big[\sin(z)\big] &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{d}{dz} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \;=\; \cos(z) \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[\cos(z)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{d}{dz}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (2n)\frac{z^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1} \frac{z^{2(m+1)-1}}{[2(m+1)-1]!} \\
&= -\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{z^{2m+1}}{[2m+1]!} \;=\; -\sin(z)
\end{aligned}
$$

c) Mit $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ folgt

$$
\begin{aligned}
e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} \\
&= \sum_{\substack{n=0\\ n \text{ gerade}}}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{\substack{n=0\\ n \text{ ungerade}}}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(i^2)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i\times i^{2k}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} + i\times\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos(z) + i\sin(z)
\end{aligned}
$$

Offensichtlich ist $\cos(-z) = \cos(z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$ so dass $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$ und damit

$$
\begin{aligned}
e^{iz} + e^{-iz} &= \cos z + i\sin z + [\cos z - i\sin z] \;=\; 2\cos z \\
e^{iz} - e^{-iz} &= \cos z + i\sin z - [\cos z - i\sin z] \;=\; 2i\sin z
\end{aligned}
$$

f) Wir beweisen zunächst die Additionstheoreme $(z, w \in \mathbb{C})$

$$
\begin{aligned}
\sin(z+w) &= \sin z\cos w + \sin w\cos z \\
\cos(z+w) &= \cos z\cos w - \sin z\sin w\ .
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
&\sin z\cos w+\sin w\cos z\\
&= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}+\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\
&= \frac{1}{4i}\Big\{e^{i(z+w)}+e^{i(z-w)}-e^{i(-z+w)}-e^{i(-z-w)}+e^{i(z+w)}+e^{i(w-z)}-e^{i(-w+z)}-e^{i(-w-z)}\Big\}\\
&= \frac{1}{4i}\Big\{2e^{i(z+w)}-2e^{i(-z-w)}\Big\} = \frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2i} = \sin(z+w)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\cos z\cos w-\sin w\sin z\\
&= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}-\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\\
&= \frac{1}{4}\Big\{e^{i(z+w)}+e^{i(z-w)}+e^{i(-z+w)}+e^{i(-z-w)}+e^{i(z+w)}-e^{i(w-z)}-e^{i(-w+z)}+e^{i(-w-z)}\Big\}\\
&= \frac{1}{4}\Big\{2e^{i(z+w)}+2e^{i(-z-w)}\Big\} = \frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z+w)
\end{aligned}
$$

Damit zeigen wir jetzt den Teil (d).

d) Mit $z=x+iy$ folgt aus den Additionstheoremen:

$$
\begin{aligned}
\sin(z) = \sin(x+iy) &= \sin(x)\cos(iy)+\cos(x)\sin(iy)\\
&= \sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)
\end{aligned}
$$

da

$$
\begin{aligned}
\cos(iy) &= \frac{e^{i\times iy}+e^{-i\times iy}}{2} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh(y)\\
\sin(iy) &= \frac{e^{i\times iy}-e^{-i\times iy}}{2i} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = i\times\frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = i\sinh(y)
\end{aligned}
$$

Und für den Cosinus:

$$
\begin{aligned}
\cos(z) = \cos(x+iy) &= \cos(x)\cos(iy)-\sin(x)\sin(iy)\\
&= \cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)
\end{aligned}
$$

e) Für jedes komplexe $z\in\mathbb{C}$ ist

$$
\begin{aligned}
\sin^2 z+\cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2\\
&= \frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4}+\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4} = \frac{2+2}{4} = 1\,.
\end{aligned}
$$