

## Lösungen 5. Übungsblatt Komplexe Funktionen

**1. Aufgabe:** Mit der Formel für die geometrische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$ :

a)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n &= \frac{1}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{1 + \frac{i}{2}}{\left|1 - \frac{i}{2}\right|^2} = \frac{1 + \frac{i}{2}}{1 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{5} \left(1 + \frac{i}{2}\right) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n &= \left(\frac{i}{2}\right)^3 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-3} \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k \\ &= -\frac{i}{8} \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i\right) = \frac{1}{20} - \frac{i}{10}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2+i}\right)^n &= \frac{1}{2+i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2+i}\right)^k \\ &= \frac{1}{2+i} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2+i}} = \frac{1}{2+i-1} \\ &= \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{|1+i|^2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\end{aligned}$$

**2. Aufgabe:** Sind folgende Reihen konvergent oder divergent? Begründen Sie Ihre Aussagen:

a) Mit  $c_n := \frac{(3+4i)^n}{n^2 5^n}$  ist

$$|c_n| = \left| \frac{(3+4i)^n}{n^2 5^n} \right| = \frac{1}{n^2} \times \left| \frac{3+4i}{5} \right|^n = \frac{1}{n^2},$$

und da  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  konvergent ist, ist nach dem Majorantenkriterium auch  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  konvergent.

b) Mit  $c_n := \frac{(1+2i)^n}{n}$  ist

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(1+2i)^{n+1}}{n+1} \frac{n}{(1+2i)^n} \right| = |1+2i| \times \frac{n}{n+1}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} |1+2i| = \sqrt{5} > 1,$$

also ist nach dem Quotientenkriterium die Reihe divergent.

c) Mit  $c_n := \frac{n}{(1-i)^n}$  ist

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{n+1}{(1-i)^{n+1}} \frac{(1-i)^n}{n} \right| = \frac{1}{|1-i|} \times \frac{n+1}{n}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|1-i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

also ist nach dem Quotientenkriterium die Reihe konvergent.

**3.Aufgabe:** Wir benutzen die Formel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$\stackrel{|1/z| < 1}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| > 1$ .

**4.Aufgabe:** Mit  $z = r e^{i\varphi}$  und  $e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$  folgt mit der Formel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\varphi) + i \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\varphi)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\varphi}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (r e^{i\varphi})^n = \frac{1}{1 - r e^{i\varphi}} = \frac{1 - r e^{-i\varphi}}{|1 - r e^{i\varphi}|^2}$$

$$= \frac{1 - r \cos \varphi + i r \sin \varphi}{(1 - r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \frac{1 - r \cos \varphi + i r \sin \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}$$

$$= \frac{1 - r \cos \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} + i \times \frac{r \sin \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}$$

Nimmt man den Real- und Imaginärteil dieser Gleichung, erhält man die angegebenen Formeln.