Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2016/17

Lösungen 4. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: **a)** Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}}{z-z_0} &= \frac{\frac{z_0-z}{zz_0}}{z-z_0}\\
&= \frac{-1}{zz_0}\\
&\overset{z\to z_0}{\to} -\frac{1}{z_0^2}
\end{aligned}$$

b) Wir haben

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z_0^n}}{z-z_0} &= \frac{\frac{z_0^n-z^n}{z^n\,z_0^n}}{z-z_0}\\
&= -\frac{1}{z^n z_0^n}\times\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}\\
&\overset{\text{Blatt3 Aufg.1}}{=} -\frac{1}{z^n z_0^n}\times\sum_{k=0}^{n-1} z^k\,z_0^{n-1-k}\\
&\overset{z\to z_0}{\to} -\frac{1}{z_0^{2n}}\times\sum_{k=0}^{n-1} z_0^k\,z_0^{n-1-k}\\
&= -\frac{n\,z_0^{n-1}}{z_0^{2n}} = -\frac{n}{z_0^{n+1}}
\end{aligned}$$

2.Aufgabe: Die Quotientenregel lautet

$$\big(\frac{f}{g}\big)'(z) = \frac{f'g-fg'}{g^2}(z)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\big(\frac{f}{g}\big)' &= \big(f\times\frac{1}{g}\big)'\\
&= f'\times\frac{1}{g}+f\times\big(\frac{1}{g}\big)'\\
&= f'\times\frac{1}{g}+f\times\frac{-1}{g^2}\,g'\\
&= \frac{f'g-fg'}{g^2}
\end{aligned}$$

3.Aufgabe: Wir haben

a)

$$\left(\frac{1}{z^2+1}\right)' = -\frac{2z}{(z^2+1)^2}$$

b)

$$\left(\frac{z}{z^2+1}\right)' = \frac{z^2+1-z\,2z}{(z^2+1)^2} = \frac{1-z^2}{(z^2+1)^2}$$

c)

$$\begin{aligned}\left(\frac{z-z^2}{z^3-z^4}\right)' &= \left\{\frac{z(1-z)}{z^3(1-z)}\right\}' = \left(\frac{1}{z^2}\right)' \\ &= -\frac{2}{z^3}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}&\left\{z^k(1-z^2)^\ell(1+z^2)^m\right\}' \\ &= kz^{k-1}(1-z^2)^\ell(1+z^2)^m + \ell(-2z)z^k(1-z^2)^{\ell-1}(1+z^2)^m + m2z\,z^k(1-z^2)^\ell(1+z^2)^{m-1} \\ &= kz^{k-1}(1-z^2)^\ell(1+z^2)^m - 2\ell z^{k+1}(1-z^2)^{\ell-1}(1+z^2)^m + 2m\,z^{k+1}(1-z^2)^\ell(1+z^2)^{m-1}\end{aligned}$$

4.Aufgabe: a) Wir haben folgende Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -e^{-y}\sin x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -e^{-y}\cos x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{-y}\cos x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= e^{-y}\cos x\end{aligned}$$

und damit

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-y}\cos x + e^{-y}\cos x = 0$$

Bestimmen Sie ein harmonisch konjugiertes v:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}\sin x \\ \Rightarrow \quad v(x,y) &= e^{-y}\sin x + C(x) \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y}\cos x + C'(x) &\overset{!}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-y}\cos x \\ \Rightarrow \quad C'(x) &= 0 \\ \Rightarrow \quad v(x,y) &= e^{-y}\sin x + const \\ \Rightarrow \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y) &= e^{-y}(\cos x + i\sin x) + const \\ &= e^{-y}e^{ix} + const = e^{i(x+iy)} + const = e^{iz} + const\end{aligned}$$

b) Wir haben folgende Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 4x^3 - 12xy^2 \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 12x^2 - 12y^2 \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -12x^2 y + 4y^3 \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -12x^2 + 12y^2
\end{aligned}$$

und damit

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12x^2 - 12y^2 - 12x^2 + 12y^2 = 0$$

Bestimmen Sie ein harmonisch konjugiertes v:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2 \\
\Rightarrow \quad v(x,y) &= 4x^3 y - 4xy^3 + C(x) \\
\Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2 y - 4y^3 + C'(x) &\overset{!}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} = 12x^2 y - 4y^3 \\
\Rightarrow \quad C'(x) &= 0 \\
\Rightarrow \quad v(x,y) &= 4x^3 y - 4xy^3 + const \\
\Rightarrow \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y) &= x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3) + const \\
&= x^4 + 4x^3(iy) + 6x^2(iy)^2 + 4x(iy)^3 + (iy)^4 + const \\
&= (x+iy)^4 + const = z^4 + const
\end{aligned}$$

5.Aufgabe: **a)** Wir haben

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= 2 - 2 = 0 \\
\Delta u_2 &= 6x - 6x = 0
\end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}
u_1 u_2 &= (x^2 - y^2)(x^3 - 3xy^2) \\
&= x^5 - 3x^3y^2 - x^3y^2 + 3xy^4 \\
&= x^5 - 4x^3y^2 + 3xy^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{\partial^2(u_1u_2)}{\partial x^2} &= 20x^3 - 24xy^2 \\
\frac{\partial^2(u_1u_2)}{\partial y^2} &= -8x^3 + 36xy^2 \\
\Rightarrow \quad \Delta(u_1u_2) = \frac{\partial^2(u_1u_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u_1u_2)}{\partial y^2} &= 20x^3 - 24xy^2 - 8x^3 + 36xy^2 \\
&= 12x^3 + 12xy^2 \neq 0
\end{aligned}$$

b) Wenn v harmonisch konjugiert ist zu u, dann ist $f := u + iv$ komplex differenzierbar und damit ist auch $f^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$ komplex differenzierbar und damit sind $\mathrm{Re}(f^2) = u^2 - v^2$ und $\mathrm{Im}(f^2) = 2uv$ harmonische Funktionen, insbesondere ist also uv eine harmonische Funktion.