Lösungen 3. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: **a)** Es ist

$$\begin{aligned}(z-w)\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} w^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} z^\ell w^{n-\ell} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k} \\ &= z^n w^0 + \sum_{\ell=1}^{n-1} z^\ell w^{n-\ell} - \sum_{k=1}^{n-1} z^k w^{n-k} - z^0 w^n \\ &= z^n - w^n \,.\end{aligned}$$

b) Nach Teil (a) ist

$$\begin{aligned}\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \\ &\overset{z\to z_0}{\to} \sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z_0^{n-1-k} = n\, z_0^{n-1}\end{aligned}$$

2.Aufgabe: Es ist $h(z) = u(z) + iv(z)$ mit $u(z) = f(x)$ und $v(z) = 0$. Weiter ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= f'(x) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannsche DGL $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ liefert $f'(x) = 0$, also ist $h(z)$ nur für konstantes $f = const$ komplex differenzierbar.

3.Aufgabe: **a)** Es ist

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(z) - (fg)(z_0)}{z - z_0} &= \frac{f(z)[g(z) - g(z_0) + g(z_0)] - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f(z)\,\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, g(z_0) \\ &\overset{z\to z_0}{\to} f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)\end{aligned}$$

a) Wir haben

$$\begin{aligned}\frac{(f\circ g)(z)-(f\circ g)(z_0)}{z-z_0} &= \frac{f(g(z))-f(g(z_0))}{g(z)-g(z_0)}\times\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\\ &\overset{z\to z_0}{\to} f'(g(z_0))\times g'(z_0)\end{aligned}$$

4.Aufgabe: **a)** Es ist

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\sin y) = u+iv$$

mit $u(x,y)=e^x\cos y$ und $v(x,y)=e^x\sin y$. Wir haben folgende Ableitungen

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial u}{\partial x} &= e^x\cos y = \tfrac{\partial v}{\partial y}\\ \tfrac{\partial u}{\partial y} &= -e^x\sin y = -\tfrac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

b) Es ist

$$\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = u+iv$$

mit

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2}\\ v(x,y) &= -\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Wir haben folgende Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

also sind die Cauchy-Riemannschen DGLen $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ erfüllt.

5.Aufgabe: Es müssen die Cauchy-Riemannschen DGLen erfüllt sein:

a) Es ist $f=u+iv$ mit $u=x^2+y^2$ und $v=0\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\neq 0=\frac{\partial v}{\partial y}$, für $x\neq 0$ und $\frac{\partial u}{\partial y}=2y\neq -0=-\frac{\partial v}{\partial x}$, für $y\neq 0$. Ist f komplex differenzierbar bei 0?

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{z\bar z}{z} = \bar z \overset{z\to 0}{\to} 0$$

also f ist komplex differenzierbar bei $z_0=0$ und sonst nicht.

b) Es ist $f = u + iv$ mit $u = x^3 - 3xy^2$ und $v = 3x^2y - y^3$. Damit

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

also f ist komplex differenzierbar. Tatsächlich ist $f(z) = z^3 = (x+iy)^3$.

b) Es ist $f = u + iv$ mit $u = x^2 + y^2$ und $v = 2xy$. Damit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

aber

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\ , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

also $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ nur für $y = 0$. Die partiellen Ableitungen sind stetig und erfüllen die Cauchy-Riemannschen DGLen nur für $y = 0 \;\Rightarrow\; f$ komplex diffbar nur für $y = 0$.