Lösungen 12. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Nach dem Residuensatz gilt

$$\int_C f(z)dz \;=\; 2\pi i \sum_{\text{Pole } z_j \text{ in } C} a_{-1}(f, z_j)$$

wobei wir die Residuen $a_{-1}(f, z_j)$ mit der Formel

$$a_{-1}(f, z_j) \;=\; \lim_{z \to z_j} \tfrac{1}{(k-1)!} \left(\tfrac{d}{dz}\right)^{k-1} \big\{ f(z)(z - z_j)^k \big\}$$

berechnen können, wenn f bei z_j einen Pol der Ordnung k hat. Insbesondere:

Für k=1: Pol erster Ordnung, einfache Polstelle:

$$a_{-1}(f, z_j) \;=\; \lim_{z \to z_j} \big\{ f(z)(z - z_j) \big\}$$

Für k=2: Pol zweiter Ordnung, quadratische Polstelle:

$$a_{-1}(f, z_j) \;=\; \lim_{z \to z_j} \tfrac{d}{dz} \big\{ f(z)(z - z_j)^2 \big\}$$

Nun ist

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z-1)^2(z^2+4)} \;=\; \frac{1}{(z-1)^2(z-2i)(z+2i)}$$

also hat f einen quadratischen Pol bei 1 und zwei einfache Pole bei $\pm 2i$. Damit erhalten wir

$$\int_{C_1^+(1)} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)} \;=\; 2\pi i \; a_{-1}(z_0 = 1)$$

$$\int_{C_4^+(0)} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)} \;=\; 2\pi i \big[\, a_{-1}(1) + a_{-1}(2i) + a_{-1}(-2i) \,\big]$$

mit

$$\begin{aligned} a_{-1}(1) &= \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \Big\{ \frac{1}{(z-1)^2(z^2+4)} \times (z-1)^2 \Big\} \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \Big\{ \frac{1}{z^2+4} \Big\} \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{-2z}{(z^2+4)^2} \;=\; -\frac{2}{25} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_{-1}(2i) &= \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z-1)^2(z-2i)(z+2i)} \times (z-2i) \\ &= \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z-1)^2(z+2i)} \\ &= \frac{1}{(2i-1)^2\,4i} = \frac{1}{(-4-4i+1)4i} = \frac{1}{(-4i-3)4i} = \frac{1}{16-12i} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_{-1}(-2i) &= \lim_{z\to -2i} \frac{1}{(z-1)^2(z-2i)(z+2i)} \times (z+2i) \\ &= \lim_{z\to -2i} \frac{1}{(z-1)^2(z-2i)} \\ &= \frac{1}{(-2i-1)^2\,(-4i)} = \frac{1}{(-4+4i+1)(-4i)} = \frac{1}{(4i-3)(-4i)} = \frac{1}{16+12i} \end{aligned}$$

so dass

$$a_{-1}(2i) + a_{-1}(-2i) \;=\; \frac{32}{256+144} = \frac{32}{400} = \frac{2}{25}$$

und damit

$$\int_{C_4^+(0)} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)} \;=\; 2\pi i\big[a_{-1}(1) + a_{-1}(2i) + a_{-1}(-2i)\big] \;=\; 0\,.$$

2.Aufgabe: Es sei γ_R die Strecke auf der reellen Achse von $-R$ nach R und $K_{R,+} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = R,\ \mathrm{Im}(z) > 0\,\}$ sei der Kreisbogen um 0 mit Radius R in der oberen Halbebene, durchlaufen von R nach $-R$. Mit

$$C_R \;:=\; \gamma_R \cup K_{R,+}$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} \end{aligned}$$

da wir weiter unten zeigen werden:

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \int_{K_{R,+}} \frac{dz}{(1+z^2)^2} &= 0 \\ \lim_{R\to\infty} \int_{K_{R,+}} \frac{dz}{1+z^4} &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Residuensatz haben wir dann:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{dz}{(1+z^2)^2} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{dz}{(z+i)^2(z-i)^2} \\
&= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2} \\
&= \lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}\,,
\end{aligned}$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2\pi i}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

Beim zweiten Integral sind die Nullstellen des Nenners gegeben durch $z^4+1=0$ oder

$$z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\quad z_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}},\quad z_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

so dass

$$z^4+1 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

und damit haben wir 4 einfache Pole, zwei in der oberen und zwei in der unteren Halbebene. Da wir den Integrationsweg in der oberen Halbebene geschlossen haben, folgt mit dem Residuensatz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^4} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} \\
&= a_{-1}(z_1) + a_{-1}(z_2) \\
&= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} + \lim_{z\to z_2}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)} \\
&= \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} + \frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}(1+i)\sqrt{2}i} + \frac{1}{-\sqrt{2}\sqrt{2}i\sqrt{2}(-1+i)} \\
&= \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{(1+i)\sqrt{2}} + \frac{1}{-\sqrt{2}(-1+i)}\right\} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}\right\} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{2} = \frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i\frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Schliesslich parametrisieren wir noch $K_{R,+}$ durch

$$z(\varphi) = R\,e^{i\varphi},\quad \varphi\in[0,\pi]$$

so dass

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{K_{R,+}} \frac{dz}{(1+z^2)^2}\Big| &= \Big|\int_0^\pi \frac{i\,R\,e^{i\varphi}\,d\varphi}{(1+R^2e^{2i\varphi})^2}\Big| \\
&\leq \int_0^\pi \frac{R\,d\varphi}{|1+R^2e^{2i\varphi}|^2} \\
&\leq \int_0^\pi \frac{R\,d\varphi}{(R^2-1)^2} = \frac{R\,\pi}{(R^2-1)^2} \stackrel{R\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

und analog $\lim_{R\to\infty}\int_{K_{R,+}} \frac{dz}{1+z^4} = 0$.

3.Aufgabe: Bestimmen Sie die Residuen $a_{-1}(f, z_0 = 0)$ für folgende Funktionen f: Mit der Formel aus Aufgabe 1:

a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$: Wegen $\cos 0 = 1 \neq 0$ hat f einen Pol dritter Ordnung bei $z = 0$. Also:

$$\begin{aligned}
a_{-1}(f,0) &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \cos z \\
&= -\frac{\cos(0)}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) $f(z) = \frac{z^2+4z+5}{z^2+z} = \frac{z^2+4z+5}{z(z+1)}$ hat einen einfachen Pol bei $z = 0$, also

$$a_{-1}(f,0) = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+4z+5}{z+1} = 5$$

c) $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ hat einen quadratischen Pol bei $z = 0$, also

$$a_{-1}(f,0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}e^z = 1$$

d) Wir benutzen die Potenzreihen von e^z und $\sin z$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^{2z}-1}{\sin^2 z} \\
&= \frac{1+2z+O(z^2)-1}{(z-O(z^3))^2} = \frac{2z+O(z^2)}{z^2+O(z^4)} \\
&= \frac{2+O(z)}{z+O(z^3)} = \frac{1}{z}\times\frac{2+O(z)}{1+O(z^2)}
\end{aligned}$$

hat einen einfachen Pol bei $z = 0$ mit Residuum

$$\lim_{z\to 0}\{zf(z)\} = \lim_{z\to 0}\frac{2+O(z)}{1+O(z^2)} = 2\,.$$