Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2016/17

Lösungen 11. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Bestimmen Sie die Taylorreihen für folgende Funktionen $f(z)$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ auf möglichst einfache Art und Weise:

a) Auf dem 6. Übungsblatt wurde die Sinus-Funktion definiert durch die Potenzreihenentwicklung

$$\sin z \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

also ist

$$f(z) \;=\; \frac{\sin z}{z} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} \;=\; 1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{120} \mp \cdots$$

Der Konvergenzradius für die Sinus-Reihe und damit auch für die $f(z)$-Reihe ist unendlich.

b) Mit der geometrischen Reihe haben wir die Entwicklung

$$\frac{1}{1+z^2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

für $|z| < 1$. Damit:

$$\begin{aligned}
f(z) \;=\; \frac{1+z^4}{1+z^2} \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \;+\; z^4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2(n+2)} \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \;+\; \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-2} z^{2k} \\
&=\; 1 - z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \;+\; \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \\
&=\; 1 - z^2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n z^{2n}
\end{aligned}$$

mit Konvergenzradius 1.

c) Hier benutzen wir die Definition der Taylorreihe und berechnen dann die Ableitungen:

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n$$

mit

$$\begin{aligned}
f(z) &= (1+z)^{1/2} \\
f'(z) &= \tfrac{1}{2}(1+z)^{-1/2} \\
f''(z) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}(1+z)^{-3/2} \\
f'''(z) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\tfrac{-3}{2}(1+z)^{-5/2} \\
f^{(4)}(z) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\tfrac{-3}{2}\tfrac{-5}{2}(1+z)^{-7/2} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(z) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\tfrac{-3}{2}\tfrac{-5}{2}\cdots\tfrac{-2n+3}{2}(1+z)^{\frac{-2n+1}{2}}
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}\cdots\frac{-2n+3}{2} \\
&= (-1)^{n-1}\,\frac{(2n-3)!!}{2^n}
\end{aligned}$$

und damit

$$f(z) = \sqrt{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{(2n-3)!!}{n!2^n}\,z^n$$

Für den Konvergenzradius würden wir $\rho = 1$ erwarten, da $\sqrt{1+z}$ an der Stelle $z = -1$ nicht komplex differenzierbar ist, checken wir das: Mit $c_n := (-1)^{n-1}\,\frac{(2n-3)!!}{n!2^n}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!2^{n+1}} \times \frac{n!2^n}{(2n-3)!!} \\
&= \frac{2n-1}{(n+1)2} \;\to\; 1
\end{aligned}$$

und damit

$$\rho = 1/\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1$$

d) Hier können wir einfach die Binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

anwenden und erhalten

$$f(z) = (1+z)^{100} = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\,z^k$$

mit Konvergenzradius unendlich.

e) Kurze Erinnerung: Mit Quotientenregel ist

$$\tan'(z) = \frac{\sin' z\cos z - \sin z\cos' z}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2(z)$$

Für jede arcus-tangens-Funktion, für jede Umkehr-Funktion des Tangens, gilt:

$$\tan\bigl(\arctan(z)\bigr) \quad = \quad z$$

und damit, wenn wir diese Gleichung differenzieren,

$$\begin{aligned} \tan'\bigl(\arctan(z)\bigr) \times \arctan'(z) &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad (1+z^2) \times \arctan'(z) &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad \arctan'(z) &= \frac{1}{1+z^2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \end{aligned}$$

mit Konvergenzradius 1. Damit:

$$\begin{aligned} f(z) \;=\; \arctan(z) &= \arctan(0) \;+\; \int_0^z \arctan'(w)dw \\ &= \arctan(0) \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^z w^{2n}dw \\ &= \arctan(0) \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\, z^{2n+1} \end{aligned}$$

ebenfalls mit Konvergenzradius 1. Und für den Hauptzweig der arcus-tangens-Funktion ist $\arctan(0) = 0$ (es ist $\tan(0) = 0$, aber ebenso ist auch $\tan\pi = 0$ oder allgemeiner $\tan(k\pi) = 0$ für ganzzahlige k).

2.Aufgabe: **a)** Die Funktion

$$f(z) \quad := \quad \frac{e^{iz}}{z}$$

ist analytisch im Inneren des geschlossenen Weges

$$C \quad = \quad C_{\text{green}} \;+\; C_{\text{blau}} \;+\; C_{\text{rot}}\ ,$$

also ist für jedes $R < \infty$ und jedes $\varepsilon > 0$

$$\int_C f(z)dz \quad = \quad \int_{\text{green}} f(z)dz \;+\; \int_{\text{blau}} f(z)dz \;+\; \int_{\text{rot}} f(z)dz \;=\; 0$$

und damit auch

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left\{ \int_{\text{green}} f(z)dz \;+\; \int_{\text{blau}} f(z)dz \;+\; \int_{\text{rot}} f(z)dz \right\} \quad = \quad 0$$

Daraus folgt sofort

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \quad = \quad -\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \;-\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon^-} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

b) siehe das file `Loesung11-Aufg2b.txt` .

c) Wir haben

$$\begin{aligned}
\int_{C_\varepsilon^-} \frac{e^{iz}}{z}\, dz &= \int_\pi^0 \frac{\exp\{i\varepsilon e^{i\varphi}\}}{\varepsilon e^{i\varphi}}\, i\varepsilon e^{i\varphi}\, d\varphi \\
&= -\int_0^\pi \exp\{i\varepsilon e^{i\varphi}\}\, i\, d\varphi \\
&\overset{\varepsilon\to 0}{\to} -\int_0^\pi \exp\{0\}\, i\, d\varphi \;=\; -i\pi\ .
\end{aligned}$$

Für den $R\to\infty$ Grenzwert integrieren wir anstatt über dem Halbkreis C_R^+ von R nach $-R$ über das dreiviertel Rechteck $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ bestehend aus den drei Strecken

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= R + t\, iR, \quad t\in[0,1] \\
\gamma_2(t) &= R + iR - t\, 2R, \quad t\in[0,1] \\
\gamma_3(t) &= -R + iR - t\, iR, \quad t\in[0,1]
\end{aligned}$$

was ebenfalls von R nach $-R$ geht. Da der Weg $C_R^+ - \gamma$ geschlossen ist und $f(z)$ im Inneren von $C_R^+ - \gamma$ analytisch ist, ist $\int_{C_R^+ - \gamma} f(z)dz = 0$ und damit $\int_{C_R^+} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)dz &= \int_0^1 \frac{e^{i(R+tiR)}}{R+t\,iR}\, iR\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{e^{iR-tR}}{1+t\,i}\, i\, dt
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\gamma_1} f(z)dz\Big| &\le \int_0^1 \frac{e^{-tR}}{|1+t\,i|}\, dt \\
&\le \int_0^1 \frac{e^{-tR}}{1}\, dt \;=\; \frac{1-e^{-R}}{R} \overset{R\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

und analog $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3} f(z)dz = 0$. Schauen wir uns noch das Integral über γ_2 an: wir haben

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_0^1 \frac{e^{i(R+iR-2tR)}}{R+iR-2tR}\,(-2R)\, dt \\
&= e^{iR-R}\int_0^1 \frac{e^{-2tR}}{1+i-2t}\,(-2)\, dt
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\gamma_2} f(z)dz\Big| &\le 2e^{-R}\int_0^1 \frac{e^{-2tR}}{|1+i-2t|}\, dt \\
&\le 2e^{-R}\int_0^1 \frac{e^{-2tR}}{1}\, dt \;=\; 2e^{-R}\,\frac{1-e^{-2R}}{2R} \overset{R\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

also insgesamt $\int_{C_R^+} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz \to 0$ für $R\to\infty$.