Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2016/17

Lösungen 10. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Wir benutzen die Formel

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

für eine im Inneren von C komplex diffbare Funktion f und z_0 eine komplexe Zahl im Inneren der einfach geschlossenen Kurve C. Damit:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{\sin z}{z}\,dz &= \sin 0 = 0\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{\sin z}{z^2}\,dz &= \frac{\cos 0}{1!} = 1\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{\sin z}{z^3}\,dz &= \frac{-\sin 0}{2!} = 0\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{\sin z}{z^4}\,dz &= \frac{-\cos 0}{3!} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

b)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{1}{z\cos z}\,dz = \frac{1}{z\cos 0} = 1$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(1)} \frac{1}{1-z^2}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(1)} \frac{1}{(1-z)(1+z)}\,dz\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(1)} \frac{-1/(1+z)}{z-1}\,dz\\
&= \frac{-1}{(1+1)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(1)} \frac{1}{(1-z^2)^2}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(1)} \frac{1}{(1-z)^2(1+z)^2}\,dz\\
&= \frac{d}{dz}\frac{1}{(1+z)^2}\Big|_{z=1} = \frac{-2}{(1+z)^3}\Big|_{z=1} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

e)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2(1)} \frac{\sqrt{4+z}}{z}\,dz \;=\; \sqrt{4} \;=\; 2$$

f)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(3i/2)} \frac{\mathrm{Log}(z)}{z-i}\,dz \;=\; \mathrm{Log}(i) \;=\; i\frac{\pi}{2}$$

3.Aufgabe: **a)** Wir bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von f um den Entwicklungspunkt $z_0 = i$ mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned}
f(z) \quad &= \quad \frac{1}{1-z} \;=\; \frac{1}{1-i-(z-i)} \;=\; \frac{1}{1-i} \times \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} \\
&\overset{|\frac{z-i}{1-i}|<1}{=} \quad \frac{1}{1-i} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n \\
&= \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}
\end{aligned}$$

b) Die Taylorreihe von f an der Stelle $z_0 = i$ lautet

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(i)}{n!}\,(z-i)^n$$

mit

$$\begin{aligned}
f'(z) &= (1-z)^{-2}, \\
f''(z) &= 2(1-z)^{-3}, \\
f'''(z) &= 3 \times 2 \times\, (1-z)^{-4}, \\
&\;\vdots \\
f^{(n)}(z) &= n!\,(1-z)^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

also

$$\frac{f^{(n)}(i)}{n!} \;=\; (1-i)^{-(n+1)} \;=\; \frac{1}{(1-i)^{n+1}}$$

und damit

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(i)}{n!}\,(z-i)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

wie in Teil (a).

c) Es ist

$$\rho \;=\; 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{(1-i)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad |c_n| = \frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt[n]{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2}\,,$$

das ist identisch mit dem Abstand von $z_0 = i$ zur nächstgelegenen Polstelle bei $z_1 = 1$, also $|z_0 - z_1| = |i - 1| = \sqrt{2}$.

4.Aufgabe: Die Funktion h ist kein Gegenbeispiel zu dem Satz aus der Vorlesung, der sagt, dass jede in einer Umgebung von z_0 komplex differenzierbare Funktion dort auch beliebig oft komplex differentierbar ist, und dass die Taylorreihe von h dann automatisch mit h übereinstimmen muss, weil die Funktion h noch nicht einmal stetig ist bei $z_0 = 0$, also schon gar nicht komplex diffbar bei $z_0 = 0$. Für $z = i\varepsilon$ hat man nämlich

$$\begin{aligned} h(i\varepsilon) &= e^{-\frac{1}{(i\varepsilon)^2}} = e^{\frac{1}{\varepsilon^2}} \\ &\overset{\varepsilon\to 0}{\to} +\infty \end{aligned}$$

In `Loesung10-Aufg2und4.txt` machen wir einen Contour-Plot von $|h(z)|$ für kleine z wo man die Unstetigkeit ebenfalls deutlich sehen kann.