Chapter 4

Brownian Motion, Wiener Measure and the Black-Scholes Model

Consider some discrete times t_k in the intervall $[0,T]$,

$$t_k \;=\; k\tfrac{T}{N} \;=\; k\Delta t\,, \qquad k = 0,1,...,N \tag{4.1}$$

where

$$N = N_T = \tfrac{T}{\Delta t} \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

Let $S_{t_k} = S_{k\Delta t}$ be the price of some stock at time t_k and denote the returns by going from one time step to the next by

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;=\; \frac{S_{t_k} - S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}} \tag{4.3}$$

One may think of Δt being one day and S_{t_k} being the closing prices at each day although later we will consider the limit $\Delta t \to 0$. It is an empirical fact that the daily returns of many assets are bell shaped, like a Gaussian distribution. Ok, das wollen wir uns zunächst mal etwas genauer an konkreten Zeitreihendaten anschauen: Wir betrachten die täglichen und wöchentlichen Returns des EuroStoxx50 aus dem Loesung2.xlsx und dann nehmen wir etwa noch ein paar DAX-Underlyings aus einem alten Excel/VBA-Übungsblatt:

$\rightarrow$ `Loesung2.xlsx` , `ExcelVBA-Loesung10.xlsm`

Die Schlussfolgerung ist dann das folgende: As a first approximation, one may write down the following stochastic model for the returns:

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;=\; \text{mean} \;+\; \text{standard deviation} \times \phi_k \tag{4.4}$$

where the ϕ_k are identically independent normally distributed random numbers with mean zero and variance one,

$$\phi_k \in \mathcal{N}(0,1) \quad \text{i.i.d.} \tag{4.5}$$

This is only a first approximation. There are deviations from a Gaussian distribution. Most financial data have more heavy tails than a normal distribution and a higher peak at the mean value. Furthermore, the returns in (4.4) are not completely independent. Many financial data show a positive correlation of the absolute values of the returns, of $|\mathrm{ret}_{t_k}|$ and $|\mathrm{ret}_{t_{k+m}}|$. In the book of Shiryaev *Essentials of Stochastic Finance* one can find a detailed discussion of the statistical analysis of financial data (in Chapter 4) as well as an overview of the proposed stochastic models to fit these data.

We now analyze how the mean and the standard deviation in (4.4) have to scale with Δt in order to get a reasonable model in the time continuous case $\Delta t \to 0$. To this end we write

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;=\; \mu\,\Delta t^{\alpha} + \sigma\,\Delta t^{\beta}\,\phi_k \tag{4.6}$$

such that

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}(1 + \mu\,\Delta t^{\alpha} + \sigma\,\Delta t^{\beta}\phi_k)$$

or, with $t = N_t \times \Delta t$, $N_t = t/\Delta t$,

$$S_t \;=\; S_0 \prod_{k=1}^{N_t} \big(1 + \mu\,\Delta t^{\alpha} + \sigma\,\Delta t^{\beta}\phi_k\big) \tag{4.7}$$

Suppose for the moment the model is deterministic, $\sigma = 0$. Then, using the first order Taylor expansion $\log(1+x) = x + O(x^2)$ in the third line,

$$\begin{aligned} S_t &= S_0\,(1+\mu\,\Delta t^{\alpha})^{N_t} \\ &= S_0\, e^{N_t \log(1+\mu\,\Delta t^{\alpha})} \\ &= S_0\, e^{N_t(\mu \Delta t^{\alpha} + O(\Delta t^{2\alpha}))} \\ &= S_0\, e^{\mu t \Delta t^{\alpha-1} + O(\Delta t^{2\alpha-1})} \end{aligned} \tag{4.8}$$

which gives $\alpha = 1$ and exponential growth (or decrease) in the time continuous case, $S_t = S_0\,e^{\mu t}$ which is simply the solution of $dS/S = \mu dt$. Now consider the stochastic part in (4.6). For simplicity, we put $\mu = 0$. Then, now using the second order Taylor expansion $\log(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ in the third line,

$$
\begin{aligned}
S_t &= S_0 \prod_{k=1}^{N_t} \left(1 + \sigma\, \Delta t^{\beta} \phi_k\right) \\
&= S_0 \,\exp\Big\{ \sum_{k=1}^{N_t} \log(1 + \sigma\, \Delta t^{\beta} \phi_k) \Big\} \\
&= S_0 \,\exp\Big\{ \sum_{k=1}^{N_t} \big[\, \sigma\, \Delta t^{\beta} \phi_k \;-\; \tfrac{1}{2}\sigma^2 \Delta t^{2\beta} \phi_k^2 \;+\; O(\Delta t^{3\beta}) \,\big] \Big\} \\
&= S_0 \,\exp\Big\{ \sigma\, \Delta t^{\beta} \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k \;-\; \frac{\sigma^2}{2} \Delta t^{2\beta} \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k^2 \;+\; O(N_t \Delta t^{3\beta} = \Delta t^{3\beta - 1}) \Big\}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

We now consider for what values of β the expectation

$$
\mathsf{E}\Big[f\Big(\Delta t^{\beta} \textstyle\sum_{k=1}^{N_t} \phi_k \Big) \Big] \;=\; \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N_t}} f\Big(\Delta t^{\beta} \textstyle\sum_{k=1}^{N_t} \phi_k \Big) \displaystyle\prod_{k=1}^{N_t} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\, d\phi_k \tag{4.10}
$$

has a nontrivial limit. Here f is some function. We make a substitution of variables $(\phi_k)_{1 \le k \le N_t} \to (x_k)_{1 \le k \le N_t}$ defined as follows:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
x_1 &=& \sqrt{\Delta t}\; \phi_1 & & \phi_1 &=& x_1 / \sqrt{\Delta t} \\
x_2 &=& \sqrt{\Delta t}\; (\phi_1 + \phi_2) & & \phi_2 &=& (x_2 - x_1)/\sqrt{\Delta t} \\
x_3 &=& \sqrt{\Delta t}\; (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) & \Leftrightarrow & \phi_3 &=& (x_3 - x_2)/\sqrt{\Delta t} \\
 &\vdots& & & &\vdots& \\
x_{N_t} &=& \sqrt{\Delta t}\; (\phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_{N_t}) & & \phi_{N_t} &=& (x_{N_t} - x_{N_t - 1})/\sqrt{\Delta t}
\end{array}
\tag{4.11}
$$

The Jacobian of the transformation (4.11) is $\det \frac{\partial \phi}{\partial x} = 1/\sqrt{\Delta t}^{N_t}$ since, with $N = N_t$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \begin{pmatrix} - & \nabla_x \phi_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \nabla_x \phi_N & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_N}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} & \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} & \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} & \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Thus the expectation (4.10) becomes, with $N = N_t = t/\Delta t$,

$$\mathsf{E}\Big[f\Big(\Delta t^\beta {\textstyle\sum_{k=1}^N} \phi_k\Big)\Big] = \int_{\mathbb{R}^N} f\Big(\Delta t^\beta {\textstyle\sum_{k=1}^{N_t}} \phi_k\Big) \prod_{k=1}^N \Big\{ \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\, d\phi_k \Big\}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} f\Big(\Delta t^{\beta-\frac12} \sqrt{\Delta t} {\textstyle\sum_{k=1}^N} \phi_k\Big) \prod_{k=1}^N \Big\{ \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \Big\}\, d\phi_1 \cdots d\phi_N$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} f\Big(\Delta t^{\beta-\frac12}\, x_N\Big) \prod_{k=1}^N \Big\{ \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2\Delta t}} \Big\}\, \det\big[\tfrac{\partial\phi}{\partial x}\big]\, dx_1 \cdots dx_N$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} f\Big(\Delta t^{\beta-\frac12}\, x_N\Big) \prod_{k=1}^N \Big\{ \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2\Delta t}} \Big\}\, \tfrac{1}{(\sqrt{\Delta t})^N}\, dx_1 \cdots dx_N$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} f\Big(\Delta t^{\beta-\frac12}\, x_N\Big) \prod_{k=1}^N \Big\{ \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\, e^{-\frac{(x_{k-1}-x_k)^2}{2\Delta t}} \Big\}\, dx_1 \cdots dx_N$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} f\big(\Delta t^{\beta-\frac12}\, x_N\big) \prod_{k=1}^N \Big\{ p_{\Delta t}(x_{k-1}, x_k)\, dx_k \Big\} \tag{4.12}$$

where we introduced the kernel

$$p_\tau(x,y) := \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}} \tag{4.13}$$

and used the definition

$$x_0 := 0 \tag{4.14}$$

The kernel (4.13) has the following basic property:

Lemma 4.1: *Let $p_t(x,y)$ be given by (4.13). Then*

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} p_s(x,y) p_t(y,z)\, dy = p_{s+t}(x,z) \tag{4.15}$$

Proof: We have

$$\begin{aligned} p_s(x,y)p_t(y,z) &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-(\frac{1}{2s}+\frac{1}{2t})y^2+(\frac{x}{s}+\frac{z}{t})y} \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{s+t}{2st}(y^2-2\frac{xt+zs}{s+t}y)} \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2} e^{\frac{s+t}{2st}(\frac{xt+zs}{s+t})^2} \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2} e^{\frac{(xt+zs)^2}{2st(s+t)}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-x^2\left(\frac{1}{2s}-\frac{t}{2s(s+t)}\right)-z^2\left(\frac{1}{2t}-\frac{s}{2t(s+t)}\right)+\frac{xz}{s+t}}\; e^{-\frac{s+t}{2st}\left(y-\frac{xt+zs}{s+t}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{x^2}{2(s+t)}-\frac{z^2}{2(s+t)}+\frac{xz}{s+t}}\; e^{-\frac{s+t}{2st}\left(y-\frac{xt+zs}{s+t}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}}\; e^{-\frac{s+t}{2st}\left(y-\frac{xt+zs}{s+t}\right)^2} \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

Thus

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} p_s(x,y)p_t(y,z)\,dy &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s+t}{2st}\left(y-\frac{xt+zs}{s+t}\right)^2} dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s+t}{2st}v^2} dv \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}}\; \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{st}{s+t}} \\
&= p_{s+t}(x,z)
\end{aligned}
$$

which proves the lemma. ■

Using this lemma, we can actually perform the integrals over $x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$. We have

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \cdots \int_{\mathbb{R}} dx_{N-1}\; \underbrace{p_{\Delta t}(x_0,x_1)\, p_{\Delta t}(x_1,x_2)}_{\int dx_1 \,\to\, p_{2\Delta t}(x_0,x_2)}\; p_{\Delta t}(x_2,x_3)\; \cdots\; p_{\Delta t}(x_{N-1},x_N) \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} dx_3 \cdots \int_{\mathbb{R}} dx_{N-1}\; \underbrace{p_{2\Delta t}(x_0,x_2)\, p_{\Delta t}(x_2,x_3)}_{\int dx_2 \,\to\, p_{3\Delta t}(x_0,x_3)}\; \cdots\; p_{\Delta t}(x_{N-1},x_N) \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx_3 \cdots \int_{\mathbb{R}} dx_{N-1}\; p_{3\Delta t}(x_0,x_3)\; \cdots\; p_{\Delta t}(x_{N-1},x_N) \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx_{N-1}\; p_{(N-1)\Delta t}(x_0,x_{N-1})\, p_{\Delta t}(x_{N-1},x_N) \\
&= p_{N\Delta t}(x_0,x_N)
\end{aligned}
$$

Thus (4.12) simplifies to

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[f\left(\Delta t^{\beta}\sum_{k=1}^{N_t}\phi_k\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}^N} f\left(\Delta t^{\beta-\frac{1}{2}}\, x_N\right) \prod_{k=1}^{N}\left\{ p_{\Delta t}(x_{k-1},x_k)\, dx_k \right\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f\left(\Delta t^{\beta-\frac{1}{2}}\, x_N\right) \;\times\; p_{N\Delta t}(x_0,x_N)\, dx_N \\
&\overset{\substack{N\Delta t = t\\ x_0=0}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\Delta t^{\beta-\frac{1}{2}}\, x\right) \;\times\; \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Hence, a nontrivial meaningful limit is obtained only for $\beta = \frac{1}{2}$.

Instead of labelling the x with $k \in \{1, 2, ..., N_t\}$, we label them with $t_k := k\Delta t$ which has the meaning of time. In particular, $t_N = N\Delta t = t$. So, we rename $x_k \to x_{k\Delta t} = x_{t_k}$. With that, we write down the following very important

Definition 4.1: *Let* $N_T = T/\Delta t$ *and* $p_t(x,y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$. *Then the measure*

$$dW(\{x_t\}_{0<t\leq T}) \;\; := \;\; \lim_{\Delta t\to 0} \prod_{k=1}^{N_T} p_{\Delta t}(x_{(k-1)\Delta t}, x_{k\Delta t})\, dx_{k\Delta t} \tag{4.18}$$

is called the Wiener measure and the family of random variables or integration variables $\{x_t\}_{0<t\leq T}$ *is called a Brownian motion. In terms of i.i.d. random variables* $\phi_k \in \mathcal{N}(0,1)$*,*

$$x_t \;\; := \;\; \lim_{\Delta t\to 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^{t/\Delta t} \phi_k \tag{4.19}$$

Remark: The time discretized version of the Wiener measure, this is what we actually will usually use, is simply given by a product of Gaussian normal distributions. With $N = N_T = T/\Delta t$ and $t_k = k\Delta t$,

$$\begin{aligned} dW(\{x_{t_k}\}_{0<k\leq N}) &= \prod_{k=1}^{N} p_{\Delta t}(x_{t_{k-1}}, x_{t_k})\, dx_{t_k} \\ &= \prod_{k=1}^{N} \Big\{ e^{-\frac{(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2}{2\Delta t}} \; \frac{dx_{t_k}}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \Big\} \\ &= \prod_{k=1}^{N} \Big\{ e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \; \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \Big\} \end{aligned} \tag{4.20}$$

where the last line in (4.20) is due to the substitution of variables, which is equivalent to the definition of Brownian motion in discrete time,

$$x_{t_k} \;\; = \;\; \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^{k} \phi_j \tag{4.21}$$

from which we get the recursion

$$x_{t_k} \;\; = \;\; x_{t_{k-1}} \; + \; \sqrt{\Delta t}\, \phi_k \tag{4.22}$$

The formulae (4.20,4.21,4.22) are very important and will be used over and over again.

Integrals with respect to the Wiener measure are computed according to the following

Theorem 4.1: *Let $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ be some function and let $0=:t_0<t_1<\cdots<t_m\le T$. Then*

$$\int F(x_{t_1},...,x_{t_m})\,dW(\{x_t\}_{0<t\le T}) = \int_{\mathbb{R}^m} F(x_{t_1},...,x_{t_m})\prod_{\ell=1}^{m} p_{t_\ell-t_{\ell-1}}(x_{t_{\ell-1}},x_{t_\ell})\,dx_{t_\ell} \tag{4.23}$$

Proof: The calculation is very similar to the calculation which lead to (4.17). Because of (4.15) only the $x_{t_1},...,x_{t_m}$ integration variables survive. We are a bit less explicit and a bit more compact now:

$$\begin{aligned}
\int F(x_{t_1},...,x_{t_m})\,dW(\{x_t\}_{0<t\le T}) &= \lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathbb{R}^{N_T}} F(x_{t_1},...,x_{t_m})\prod_{k=1}^{N_T} p_{\Delta t}(x_{(k-1)\Delta t},x_{k\Delta t})\,dx_{k\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathbb{R}^{N_T}} F(x_{t_1},...,x_{t_m})\prod_{k=1}^{N_{t_1}} p_{\Delta t}(...)\,dx_{k\Delta t}\prod_{k=N_{t_1}+1}^{N_{t_2}} p_{\Delta t}(...)\,dx_{k\Delta t}\times\cdots\\
&\qquad\cdots\times\prod_{k=N_{t_{m-1}}+1}^{N_{t_m}} p_{\Delta t}(...)\,dx_{k\Delta t}\\
&\overset{(4.15)}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathbb{R}^m} F(x_{t_1},...,x_{t_m})\,p_{t_1}(x_0,x_{t_1})\,dx_{t_1}\;p_{t_2-t_1}(x_{t_1},x_{t_2})\,dx_{t_2}\;\times\cdots\\
&\qquad\cdots\times\; p_{t_m-t_{m-1}}(x_{t_{m-1}},x_{t_m})\,dx_{t_m}\\
&= \int_{\mathbb{R}^m} F(x_{t_1},...,x_{t_m})\prod_{\ell=1}^{m} p_{t_\ell-t_{\ell-1}}(x_{t_{\ell-1}},x_{t_\ell})\,dx_{t_\ell}
\end{aligned}$$

which coincides with (4.23). ■

Now we return to (4.9) and put $\beta=\frac{1}{2}$. Then

$$S_t \;=\; S_0\,\exp\Big\{\,\sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{k=1}^{N_t}\phi_k \;-\; \frac{\sigma^2}{2}\Delta t\sum_{k=1}^{N_t}\phi_k^2 \;+\; O(\sqrt{\Delta t})\,\Big\} \tag{4.24}$$

The first term in the exponent converges to a Brownian motion $x_t=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\Delta t}\,\sum_{k=1}^{N_t}\phi_k$ and the last term vanishes, but what about the second term? There is the following

Theorem 4.2: Let

$$I_{\Delta t} \;:=\; \Delta t\sum_{k=1}^{N_t}\phi_k^2$$

with $N_t=t/\Delta t$ and $\phi_1,\phi_2,\cdots$ being independent Gaussian random numbers with mean 0 and standard deviation 1. Then the following statements hold:

a) $\mathsf{E}[I_{\Delta t}] \;=\; t$

b) $\mathsf{V}[I_{\Delta t}] \;=\; 2\,t\,\Delta t$

c) $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \mathsf{Prob}\Big[\;\big|I_{\Delta t} - t\big| \geq \varepsilon\;\Big] \;=\; 0 \qquad \forall\varepsilon > 0\;.$

More intuitively, we may rewrite the statement of part (c) simply as

$$\lim_{\Delta t\to 0} I_{\Delta t} \;=\; \lim_{\Delta t\to 0} \Delta t \textstyle\sum_{k=1}^{N_t} \phi_k^2 \;=\; t\;.$$

Proof: For standard normal distributed random numbers we have

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[\phi^2] &= 1 \\ \mathsf{E}[\phi^4] &= 3 \\ \mathsf{V}[\phi^2] \;=\; \mathsf{E}[\phi^4] - \big(\mathsf{E}[\phi^2]\big)^2 &= 2 \end{aligned}$$

since more generally

$$\mathsf{E}[\phi^{2n}] \;=\; (2n-1)!!$$

Thus we get

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[I_{\Delta t}] &= \Delta t \sum_{k=1}^{N_t} \mathsf{E}[\phi_k^2] \\ &= \Delta t \sum_{k=1}^{N_t} 1 \;=\; \Delta t\, N_t \;=\; t\;. \end{aligned}$$

To calculate the variance, we rewrite it as a covariance since the covariance is a bilinear quantity where we can bring sums from inside to the outside of the covariance as follows:

$$\begin{aligned} \mathsf{V}[I_{\Delta t}] &= \mathsf{Cov}[I_{\Delta t}, I_{\Delta t}] \\ &= \mathsf{Cov}\Big[\;\Delta t \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k^2\;,\;\Delta t \sum_{\ell=1}^{N_t} \phi_\ell^2\;\Big] \\ &= (\Delta t)^2 \sum_{k,\ell=1}^{N_t} \mathsf{Cov}[\;\phi_k^2\;,\;\phi_\ell^2\;] \\ &= (\Delta t)^2 \sum_{k,\ell=1}^{N_t} \delta_{k,\ell}\,\mathsf{Cov}[\;\phi_k^2\;,\;\phi_k^2\;] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\Delta t)^2 \sum_{k=1}^{N_t} \mathsf{V}[\,\phi_k^2\,] \\
&= (\Delta t)^2 \sum_{k=1}^{N_t} 2 \\
&= 2\,t\,\Delta t\,.
\end{aligned}
$$

Now we use Chebyshev's inequality. It states that for any random variable X we have

$$\mathsf{Prob}\Big(\,\big|\,X - \mathsf{E}[X]\,\big| \,\geq\, \varepsilon\,\Big) \;\leq\; \frac{\mathsf{V}[X]}{\varepsilon^2}\;.$$

Then we put $X = I_{\Delta t}$ such that with the results from part (a) and (b) we obtain

$$\mathsf{Prob}\Big(\,\big|\,I_{\Delta t} - t\,\big| \,\geq\, \varepsilon\,\Big) \;\leq\; \frac{2t\Delta t}{\varepsilon^2} \;\overset{\Delta t \to 0}{\to}\; 0$$

This proves the theorem. ■

We summarize our results: The statistics of financial data suggests, as a first approximation, the stochastic model (4.4). A meaningful continuous time model is only obtained if the exponents in (4.6) are choosen to be $\alpha = 1$ and $\beta = \frac{1}{2}$ which results in

$$\frac{S_{t_k} - S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}} \;=\; \frac{\Delta S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \;=\; \mu\,\Delta t + \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \tag{4.25}$$

In view of (4.11), in particular, the right hand side thereof, and recalling the relabelling $x_k \to x_{k\Delta t}$, we may write this as

$$\frac{\Delta S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \;=\; \mu\,\Delta t + \sigma\,(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) = \mu\,\Delta t + \sigma\,\Delta x_{t_k} \tag{4.26}$$

or, in the continuous time limit $\Delta t \to 0$,

$$\frac{dS_t}{S_t} \;=\; \mu\,dt + \sigma\,dx_t \tag{4.27}$$

where $\{x_t\}_{0<t\leq T}$ is a Brownian motion. And we saw that the discrete time solution (4.24) of (4.26) (for $\mu \neq 0$ there is an additional $\mu N_t \Delta t$ in the exponent, as in (4.8)) converges to

$$S_t \;=\; S_0\, e^{\mu t + \sigma x_t - \frac{\sigma^2}{2} t} \tag{4.28}$$

The solution (4.28) is usually refered to as a 'geometric Brownian motion'. In a following section we will rederive (4.28) as an application of the Ito-Lemma.

Definition 4.2: Let $\{x_t\}_{t\geq 0}$ be a Brownian motion. Then the stochastic process (4.28),

$$S_t \;=\; S_0\, e^{\mu t + \sigma x_t - \frac{\sigma^2}{2} t} \tag{4.29}$$

is called the **Black-Scholes model** for the asset price process $\{S_t\}_{t\geq 0}$. It is a solution of the stochastic differential equation (4.27),

$$\tfrac{dS_t}{S_t} \;=\; \mu\, dt \;+\; \sigma\, dx_t \tag{4.30}$$

Equation (4.30) is called the **Black-Scholes Stochastic Differential Equation** or Black-Scholes SDE (not to be confused with the Black-Scholes PDE which we discuss in Chapter 7).

In discrete time, Black-Scholes paths can be simulated through

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\, \big(\, 1 \;+\; \mu\, \Delta t \;+\; \sigma \sqrt{\Delta t}\, \phi_k \,\big) \tag{4.31}$$

with the ϕ_k being standard normal distributed random numbers.

Excel/VBA-Demos:

a) Show through simulation that for small Δt the S_{t_k}'s calculated iteratively through (4.31) and directly through (4.29) are approximately equal.

b) Confirm part (c) of Theorem 4.2. That is, show through simulation that in discrete time for small Δt

$$I_{\Delta t} \;:=\; \Delta t \textstyle\sum_{k=1}^{N_t} \phi_k^2 \;\approx\; t \;.$$

Völlig analog zum Theorem 4.2 kann man die folgende leichte Verallgemeinerung beweisen:

Theorem 4.3: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ sei eine beliebige Funktion. Für eine Diskretisierung $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, N\Delta t = T\}$ des Intervalls $[0,T]$ definieren wir die Grösse

$$I_{\Delta t}(f) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} f(t_k)\, (x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2 \;=\; \Delta t \sum_{k=1}^{N_t} f(t_k)\, \phi_k^2 \tag{4.32}$$

Dann gilt

$$\lim_{\Delta t \to 0} I_{\Delta t}(f) \;=\; \int_0^T f(t)\,dt \;\; . \tag{4.33}$$

Dabei ist der Limes im folgenden Sinne zu verstehen:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathsf{Prob}\Big[\,\big|I_{\Delta t}(f) \,-\, \int_0^T f(t)\,dt\big| \,\geq\, \varepsilon\,\Big] \;=\; 0 \qquad \forall \varepsilon > 0 \;\; .$$

Aus diesem Theorem ergeben sich dann die

Rechenregeln für die Brownsche Bewegung: Schreibt man den Ausdruck in (4.32) im Limes $\Delta t \to 0$ als $\int_0^T f(t)\,(dx_t)^2$, dann liest sich die Gleichung (4.33) folgendermaßen:

$$\int_0^T f(t)\,(dx_t)^2 \;=\; \int_0^T f(t)\,dt \tag{4.34}$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung (4.34) wird üblicherweise in der kompakten Notation

$$(dx_t)^2 \;=\; dt \tag{4.35}$$

zum Ausdruck gebracht, obwohl die Gleichung (4.35) nur für sich genommen, etwa wieder mit endlicher Diskretisierung $dt \to \Delta t > 0$, ja nicht richtig ist: Die Brownsche Bewegung ist gegeben durch (bei endlicher Diskretisierung)

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^k \phi_j \tag{4.36}$$

mit standard-normalverteilten Zufallszahlen ϕ_j, also ist

$$(dx_t)^2 \;\leftarrow\; (\Delta x_{t_k})^2 \;=\; (x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2 \;=\; \big(\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\,\big)^2 \;=\; \Delta t\,\phi_k^2 \quad \neq \quad \Delta t \;\to\; dt \tag{4.37}$$

Erst wenn die Gleichung (4.37) über k summiert wird und dann der Limes $\Delta t \to 0$ genommen wird (und vorher vielleicht noch mit einem beliebigen Faktor f_{t_k} multipliziert wird), also erst nach Anwenden der Operation

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^N f_{t_k} \;\cdots \qquad\qquad \text{mit } \; N \;=\; \tfrac{T}{\Delta t} \;\to\; \infty \tag{4.38}$$

erhält man aus (4.37) eine korrekte Identität. Allerdings, wenn man eine formale Rechnung macht, in der dt's und dx_t's vorkommen, hat man das Anwenden der Operation (4.38) am

Ende der Rechnung üblicherweise immer vor um dann zu konkreten Zahlen zu kommen, und deshalb werden wir also im weiteren Verlauf der Vorlesung bei solchen Rechnungen immer die **folgenden Rechenregeln**

$$\begin{aligned} (dx_t)^2 &= dt \\ dx_t\, dt &= 0 \\ (dt)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

verwenden.

Da die Rechenregel $(dx_t)^2 = dt$ insbesondere für die Ito-Formel und die Definition von stochastischen Integralen sehr wichtig ist, das ist nämlich die Ursache dafür, dass es überhaupt unterschiedliche Definitionen von stochastischen Integralen wie Ito- und Stratonovich-Integrale gibt, wollen wir neben den Theoremen 4.2 und 4.3 noch das folgende Theorem 4.4 beweisen, was diese Rechenregel ebenfalls noch einmal plausibilisieren tut.

Theorem 4.4: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ sei eine beliebige Funktion. Für eine Diskretisierung $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, N\Delta t = T\}$ des Intervalls $[0,T]$ definieren wir die Grösse

$$I_{\Delta t}(f) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} f(t_k)\,(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2 \;=\; \Delta t \sum_{k=1}^{N_t} f(t_k)\,\phi_k^2 \tag{4.40}$$

Gegeben sei eine weitere beliebige Funktion von einer Variablen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in die wir das $I_{\Delta t}(f)$ einsetzen wollen. Dann gilt:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathsf{E}\Big[\, F\big(\, I_{\Delta t}(f)\,\big)\,\Big] \;=\; F\Big(\, \textstyle\int_0^T f(t)\, dt\,\Big)\;. \tag{4.41}$$

Dabei bezeichne das $\mathsf{E}[\,\cdot\,]$ auf der linken Seite von (4.41) den Erwartungswert bezüglich des Wiener-Masses.

Proof: Wir wollen annehmen, dass das F Fourier-transformierbar ist. Also das F habe die Darstellung (wir wählen hier die Mathematiker-Konvention und verteilen die 2π's symmetrisch auf Hin- und Rücktransformierte)

$$F(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(q)\; e^{iqx}\; \tfrac{dq}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.42}$$

mit der Fouriertransformierten

$$\hat{F}(q) \;=\; \int_{\mathbb{R}} F(x)\; e^{-iqx}\; \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.43}$$

Dann können wir schreiben

$$F\big(\,I_{\Delta t}(f)\,\big) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(q)\; e^{iq\,I_{\Delta t}(f)}\; \tfrac{dq}{\sqrt{2\pi}}$$

und bekommen

$$\mathsf{E}\Big[\; F\big(\,I_{\Delta t}(f)\,\big)\;\Big] \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(q)\; \mathsf{E}\big[\; e^{iq\,I_{\Delta t}(f)}\;\big]\; \tfrac{dq}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.44}$$

Nun ist mit $N = N_t = T/\Delta t$ und $f_{t_k} \equiv f(t_k)$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\; e^{iq\,I_{\Delta t}(f)}\;\big] \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^N} \exp\Big\{\; iq\,\Delta t \sum_{k=1}^{N} f(t_k)\,\phi_k^2\;\Big\} \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\; \tfrac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \quad \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{1}{2}\big(\,1-2iq\Delta t f_{t_k}\,\big)\phi_k^2}\; \tfrac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \quad \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{1-2iq\Delta t f_{t_k}}} \\
&= \quad \exp\Big\{\; -\tfrac{1}{2}\; \textstyle\sum_{k=1}^{N} \log\big[\,1 \;-\; 2iq\Delta t f_{t_k}\,\big]\;\Big\}
\end{aligned}$$

Mit $\log[1+x] = x + O(x^2)$ bekommen wir dann

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\; e^{iq\,I_{\Delta t}(f)}\;\big] \quad &= \quad \exp\Big\{\; +\tfrac{1}{2}\; \textstyle\sum_{k=1}^{N}\; 2iq\Delta t f_{t_k} \;+\; O(\Delta t)\;\Big\} \\
&\overset{\Delta t \to 0}{\rightarrow} \quad \exp\Big\{\; +iq \textstyle\int_0^T f_t\, dt\;\Big\}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

und wenn wir (4.45) in (4.44) einsetzen schliesslich

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0} \mathsf{E}\Big[\; F\big(\,I_{\Delta t}(f)\,\big)\;\Big] \quad &= \quad \lim_{\Delta t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(q)\; \mathsf{E}\big[\; e^{iq\,I_{\Delta t}(f)}\;\big]\; \tfrac{dq}{\sqrt{2\pi}} \\
&\overset{(4.45)}{=} \quad \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(q)\;\; \exp\big\{\; +iq \textstyle\int_0^T f(t)\, dt\;\big\}\; \tfrac{dq}{\sqrt{2\pi}} \\
&\overset{(4.42)}{=} \quad F\Big(\; \textstyle\int_0^T f(t)\, dt\;\Big)
\end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Die Ito-Formel:

Das ist jetzt keine grosse Sache mehr, die wesentliche Arbeit haben wir schon gemacht. Es sei $f = f(x)$ eine beliebige Funktion. Für das x wollen wir die Brownsche Bewegung x_t in das f einsetzen. Wir betrachten die Differenz $f(x_T) - f(x_0)$ für einen gegebenen Zeithorizont $T > 0$ und schreiben

$$f(x_T) - f(x_0) \;=\; \sum_{k=1}^{N} \{\, f(x_{t_k}) \,-\, f(x_{t_{k-1}})\, \} \tag{4.46}$$

mit $t_k = k\Delta t$ und $N = T/\Delta t$ so dass $t_N = N\Delta t = T$ wie üblich. Da wir am Ende den Limes $\Delta t \to 0$ nehmen wollen, schreiben wir gleich dt anstatt Δt und dx_t anstatt Δx_t. Also etwa $t_k = k\,dt$ und $dx_{t_k} = x_{t_k} - x_{t_{k-1}} = \sqrt{dt}\,\phi_k$. Wir haben dann also:

$$x_{t_k} \;=\; x_{t_{k-1}} \,+\, dx_{t_k} \tag{4.47}$$

Mit dem Satz von Taylor können wir dann schreiben:

$$\begin{aligned} f(x_{t_k}) \;&=\; f\big(x_{t_{k-1}} + dx_{t_k}\big) \\ &=\; f(x_{t_{k-1}}) \,+\, f'(x_{t_{k-1}})\,dx_{t_k} \,+\, \tfrac{1}{2}\,f''(x_{t_{k-1}})\,(dx_{t_k})^2 \,+\, \tfrac{1}{3!}\,f'''(x_{t_{k-1}})\,(dx_{t_k})^3 \,+\,\cdots \end{aligned} \tag{4.48}$$

Jetzt benutzen wir die Rechenregeln für die Brownsche Bewegung:

$$(dx_{t_k})^2 \;=\; dt$$

und

$$(dx_{t_k})^3 \;=\; (dx_{t_k})^2\,dx_{t_k} \;=\; dt\,dx_{t_k} \;=\; 0$$

Also bekommen wir im Limes $\Delta t \to 0$:

$$\begin{aligned} f(x_{t_k}) \;&=\; f(x_{t_{k-1}}) \,+\, f'(x_{t_{k-1}})\,dx_{t_k} \,+\, \tfrac{1}{2}\,f''(x_{t_{k-1}})\,dt \,+\, \tfrac{1}{3!}\,f'''(x_{t_{k-1}}) \,\times\, 0 \\ &=\; f(x_{t_{k-1}}) \,+\, f'(x_{t_{k-1}})\,dx_{t_k} \,+\, \tfrac{1}{2}\,f''(x_{t_{k-1}})\,dt \end{aligned} \tag{4.49}$$

oder

$$df(x_{t_k}) \;:=\; f(x_{t_k}) \,-\, f(x_{t_{k-1}}) \;=\; f'(x_{t_{k-1}})\,dx_{t_k} \,+\, \tfrac{1}{2}\,f''(x_{t_{k-1}})\,dt \tag{4.50}$$

Gleichung (4.50) wird auch als Ito-Formel in differentieller Version bezeichnet. Wenn wir (4.50) in (4.46) einsetzen, bekommen wir

$$\begin{aligned} f(x_T) - f(x_0) &= \sum_{k=1}^{N} \{ \, f(x_{t_k}) \; - \; f(x_{t_{k-1}}) \, \} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \{ \, f'(x_{t_{k-1}}) \, dx_{t_k} \; + \; \tfrac{1}{2} \, f''(x_{t_{k-1}}) \, dt \, \} \\ &\overset{\Delta t \to 0}{=} \int_0^T f'(x_t) \, dx_t \; + \; \tfrac{1}{2} \int_0^T f''(x_t) \, dt \end{aligned} \tag{4.51}$$

Das erste Integral in (4.51), wir ersetzten zum Zwecke der Definition den Integranden f' durch ein f,

$$\int_0^T f(x_t) \, dx_t \;\; := \;\; \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(x_{t_{k-1}}) \, dx_{t_k} \tag{4.52}$$

wird auch als ein stochastisches Ito-Integral bezeichnet. Neben solchen stochastischen Ito-Integralen gibt es auch stochastische Stratonovich-Integrale, diese sind folgendermassen definiert

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t \;\; := \;\; \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\big(\tfrac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}\big) \, dx_{t_k} \tag{4.53}$$

Man tut also das f nicht am 'linken Randpunkt' $x_{t_{k-1}}$ evaluieren, sondern am 'Intervallmittelpunkt' $\frac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}$. Bei den üblichen deterministischen Riemann-Integralen wie man sie aus der Analysis kennt, spielt das natürlich keine Rolle und im Limes Rechteckbreite gegen Null kommt da immer dasselbe raus. Das liegt daran, dass $(dt)^2 = 0$ ist oder wenn die deterministische Integrationsvariable ein x ist, $(dx)^2 = 0$. Für eine Brownsche Bewegung ist nun aber $(dx_t)^2 \neq 0$ und das hat die folgende, auf den ersten Blick doch etwas gewöhnungsbedürftige Konsequenz:

Theorem 4.5: Für stochastische Ito- und Stratonovich-Integrale besteht der folgende Zusammenhang:

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t \;\; = \;\; \int_0^T f(x_t) \, dx_t \; + \; \tfrac{1}{2} \int_0^T f'(x_t) \, dt \tag{4.54}$$

für eine beliebige Funktion $f = f(x)$.

Proof: Mit $dx_{t_k} = x_{t_k} - x_{t_{k-1}}$ haben wir

$$\tfrac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2} \;\; = \;\; x_{t_{k-1}} \; + \; \tfrac{x_{t_k} - x_{t_{k-1}}}{2} \;\; = \;\; x_{t_{k-1}} \; + \; \tfrac{dx_{t_k}}{2}$$

und damit

$$\begin{aligned}
f\left(\tfrac{x_{t_{k-1}}+x_{t_k}}{2}\right) dx_{t_k} &= f\left(x_{t_{k-1}} + \tfrac{dx_{t_k}}{2}\right) dx_{t_k} \\
&\overset{\text{Taylor}}{=} \left\{ f(x_{t_{k-1}}) \;+\; f'(x_{t_{k-1}}) \tfrac{dx_{t_k}}{2} \;+\; \tfrac{1}{2}\, f''(x_{t_{k-1}}) \left(\tfrac{dx_{t_k}}{2}\right)^2 \right\} dx_{t_k} \\
&\overset{(4.39)}{=} f(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} \;+\; f'(x_{t_{k-1}}) \tfrac{(dx_{t_k})^2}{2} \;+\; \tfrac{1}{2}\, f''(x_{t_{k-1}}) \tfrac{dt\, dx_{t_k}}{4} \\
&\overset{(4.39)}{=} f(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} \;+\; f'(x_{t_{k-1}}) \tfrac{dt}{2} \;+\; \tfrac{1}{2}\, f''(x_{t_{k-1}}) \;\times\; 0
\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(x_t) \circ dx_t &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\left(\tfrac{x_{t_{k-1}}+x_{t_k}}{2}\right) dx_{t_k} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} \left\{ f(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} \;+\; f'(x_{t_{k-1}}) \tfrac{dt}{2} \right\} \\
&= \int_0^T f(x_t)\, dx_t \;+\; \tfrac{1}{2} \int_0^T f'(x_t)\, dt
\end{aligned}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Aus (4.51) und (4.54) ergibt sich dann sofort das

Theorem 4.6: Es sei $f = f(x)$ eine beliebige, zweimal differenzierbare Funktion und $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt:

$$f(x_T) - f(x_0) = \int_0^T f'(x_t)\, dx_t \;+\; \tfrac{1}{2} \int_0^T f''(x_t)\, dt \tag{4.55}$$

$$= \int_0^T f'(x_t) \circ dx_t \tag{4.56}$$

Dabei ist das erste Integral in (4.55) ein stochastisches Ito-Integral und das Integral in (4.56) ist ein stochastisches Stratonovich-Integral. Die Formel (4.55) wird auch als Ito-Formel oder als das Ito-Lemma bezeichnet, in integraler Version.