

# Chapter 15

## Ito-Diffusions and the Ornstein-Uhlenbeck Process

### Ito Diffusions

A  $d$ -dimensional Ito process  $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$  is a stochastic process of the form  $X_t = X_0 + \int_0^t u ds + \int_0^t v dB_s$  or, in differential form,

$$dX_t = u(t, \{B_s\}_{0 \leq s \leq t}) dt + v(t, \{B_s\}_{0 \leq s \leq t}) dB_t \quad (15.1)$$

The function  $u$  takes values in  $\mathbb{R}^d$ ,  $v$  takes values in  $\mathbb{R}^{d \times m}$  and  $B_t$  is an  $m$ -dimensional (uncorrelated) Brownian motion. The functions  $u$  and  $v$  are non anticipating. That is, at time  $t$ ,  $u$  and  $B_{t+h} - B_t$  are statistically independent for all  $h > 0$ . Therefore  $u = u(t, \{B_s\}_{0 \leq s \leq t})$ . If  $f = f(t, x_1, \dots, x_d)$  is some  $\mathbb{R}$  valued  $C^2$  function, then, by the Ito formula,  $Y_t := f(t, X_t)$  is again a (one dimensional) Ito process with differential

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) dX_t^i dX_t^j \quad (15.2)$$

where  $dX_t^i dX_t^j$  has to be computed according to the rules  $dt \cdot dt = dt \cdot dB_t^i = dB_t^i \cdot dt = 0$  and  $dB_t^i \cdot dB_t^j = \delta_{ij} dt$ .

A  $d$ -dimensional Ito diffusion  $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$  is a solution to the stochastic differential equation (SDE)

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t \quad (15.3)$$

where  $\mu$  takes values in  $\mathbb{R}^d$ ,  $\sigma$  takes values in  $\mathbb{R}^{d \times m}$  and  $B_t$  is an  $m$ -dimensional (uncorrelated) Brownian motion. Stochastic differential equations are used to model the behaviour of many financial assets. The proof of the following existence and uniqueness result can be found, for example, in the book of Oksendal [16].

**Theorem 15.1:** For a given SDE (15.3) with some initial condition  $X_0 = x_0$ , there exists a unique  $t$ -continuous solution  $X_t$  in  $[0, T]$  if the following two conditions are fulfilled:

(i) Lipschitz condition:

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad t \in [0, T] \quad (15.4)$$

(ii) growth condition:

$$|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in [0, T] \quad (15.5)$$

Here  $|\sigma|^2 = \sum_{i,j} |\sigma_{ij}|^2$ . The solution is non anticipating,

$$X_t = X(t, \{B_s\}_{0 \leq s \leq t}) \quad (15.6)$$

**Sketch of Proof:** The proof is similar to the proof for the deterministic case. The solution is obtained by iteration. Let us first prove the following inequality (15.10) from which existence and uniqueness follows. Suppose  $X_t$  and  $\hat{X}_t$  are solutions of (15.3). That is,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad (15.7)$$

and the same for  $\hat{X}_t$  with initial condition, say,  $\hat{X}_0$ . Let

$$a_s := \mu(s, X_s) - \mu(s, \hat{X}_s) \quad (15.8)$$

$$\gamma_s := \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s) \quad (15.9)$$

Then

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_t - \hat{X}_t|^2] &= \mathbb{E}\left[\left(X_0 - \hat{X}_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \gamma_s dB_s\right)^2\right] \\ &\leq 3\mathbb{E}[|X_0 - \hat{X}_0|^2] + 3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t a_s ds\right)^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \gamma_s dB_s\right)^2\right] \\ &\leq 3\mathbb{E}[|X_0 - \hat{X}_0|^2] + 3t\mathbb{E}\left[\int_0^t a_s^2 ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t \gamma_s^2 ds\right] \\ &\leq 3\mathbb{E}[|X_0 - \hat{X}_0|^2] + 3(1+t)D^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s - \hat{X}_s|^2 ds\right] \\ &= 3\mathbb{E}[|X_0 - \hat{X}_0|^2] + 3(1+t)D^2 \int_0^t \mathbb{E}[|X_s - \hat{X}_s|^2] ds \end{aligned} \quad (15.10)$$

Thus, for  $t \in [0, T]$ , the function

$$v(t) = \mathbb{E}[|X_t - \hat{X}_t|^2] \quad (15.11)$$

satisfies

$$v(t) \leq F + A \int_0^t v(s) ds \quad (15.12)$$

if we put  $F = 3\mathbb{E}[|X_0 - \hat{X}_0|^2]$  and  $A = 3(1+T)D^2$ . From this, using the Gronwall lemma, one deduces that

$$v(t) \leq Fe^{At} \quad (15.13)$$

Thus uniqueness follows if the initial conditions are the same,  $X_0 = \hat{X}_0$ . To construct a solution, define  $Y_t^{(0)} := X_0$  and iterate the equation

$$Y_t^{(k+1)} := X_0 + \int_0^t \mu(s, Y_s^{(k)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(k)}) dB_s \quad (15.14)$$

By construction, all the  $Y_t^{(k)}$  are non anticipating,  $Y_t^{(k)} = Y_t^{(k)}(\{B_s\}_{0 \leq s \leq t})$ . From inequality (15.10) we get

$$\mathbb{E}[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2] \leq 3(1+T)D^2 \int_0^t \mathbb{E}[|Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|^2] ds \quad (15.15)$$

for  $k \geq 1$  and  $\mathbb{E}[|Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}|^2] \leq A_1 t$  where  $A_1$  depends only on  $C, T$  and  $\mathbb{E}[X_0^2]$ . By induction, one obtains

$$\mathbb{E}[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2] \leq \frac{(A_2 t)^{k+1}}{(k+1)!} \quad k \geq 0, t \in [0, T] \quad (15.16)$$

with some suitable constant  $A_2$  depending only on  $C, D, T$  and  $\mathbb{E}[X_0^2]$ . From this one can deduce that the sequence

$$Y_t^{(n)}(\{B_s\}) = Y_t^{(0)}(\{B_s\}) + \sum_{k=0}^{n-1} (Y_t^{(k+1)}(\{B_s\}) - Y_t^{(k)}(\{B_s\})) \quad (15.17)$$

is uniformly convergent in  $[0, T]$  for almost all Brownian paths  $\{B_s\}_{0 \leq s \leq t}$ . ■

From the above uniqueness result follows the Markov property for the solution of (15.3). There is the following

**Theorem 15.2:** Let  $X_t = X_t^{t_0, x_0}$  be the unique solution of (15.3) with initial condition  $X_{t_0} = x_0 \in \mathbb{R}^d$ . Let  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  be some times and  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ . Define the probability densities

$$\mathbb{P}_W(X_{t_1} \in [x_1, x_1 + dx_1), \dots, X_{t_n} \in [x_n, x_n + dx_n)) =: p(t_0, x_0; t_1, x_1; \dots; t_n, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (15.18)$$

where  $\mathbb{P}_W$  is the probability with respect to the Wiener measure. Then

$$p(t_0, x_0; t_1, x_1; \dots; t_n, x_n) = p(t_0, x_0; t_1, x_1) p(t_1, x_1; t_2, x_2) \cdots p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x_n) \quad (15.19)$$

where for  $s < t$

$$p(s, x; t, y) dy = \mathbf{P}_W(X_t^{s,x} \in [y, y + dy]) \quad (15.20)$$

In particular, for some function  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{E}_W[F(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})] = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} F(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n p(t_{j-1}, x_{j-1}; t_j, x_j) dx_j \quad (15.21)$$

**Proof:** Let  $dW_{(t_0, T]}^{y_0}$  be the Wiener measure on paths on  $(t_0, T]$ ,  $T > t_n$ , which start at  $y_0$  ( $t_j = j\Delta t$ ,  $N_T = T/\Delta t$ ),

$$\begin{aligned} dW_{(t_0, T]}^{y_0}(\{y_t\}_{t_0 < t \leq T}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \prod_{j=N_{t_0}+1}^{N_T} p_{\Delta t}(y_{t_{j-1}}, y_{t_j}) dy_{t_j} \\ &= dW_{(t_0, t_1]}^{y_0}(\{y_t\}_{t_0 < t \leq t_1}) dW_{(t_1, t_2]}^{y_{t_1}}(\{y_t\}_{t_1 < t \leq t_2}) \cdots dW_{(t_n, T]}^{y_{t_n}}(\{y_t\}_{t_n < t \leq T}) \end{aligned} \quad (15.22)$$

Since the solution of (15.3) can be obtained by iteration of the equation  $X_t = x_0 + \int_{t_0}^t \mu(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dB_s$ , we have that

$$X_t^{t_0, x_0} = X_t(\{B_s\}_{t_0 < s \leq t}) \quad (15.23)$$

The probability in (15.18) can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_W(X_{t_1} \in [x_1, x_1 + dx_1), \dots, X_{t_n} \in [x_n, x_n + dx_n)) & \\ &= \int \chi(X_{t_1} \in [x_1, x_1 + dx_1), \dots, X_{t_n} \in [x_n, x_n + dx_n)) dW_{(t_0, T]}^{y_0} \\ &\stackrel{(15.23)}{=} \int \chi(X_{t_1} \in [x_1, x_1 + dx_1)) \cdots \chi(X_{t_n} \in [x_n, x_n + dx_n)) dW_{(t_0, t_n]}^{y_0} \\ &\stackrel{(15.22)}{=} \int \chi(X_{t_1} \in [x_1, x_1 + dx_1)) \cdots \chi(X_{t_n} \in [x_n, x_n + dx_n)) \prod_{j=1}^n dW_{(t_{j-1}, t_j]}^{y_{t_{j-1}}}(\{y_t\}_{t_{j-1} < t \leq t_j}) \end{aligned} \quad (15.24)$$

By the uniqueness result, we have, for  $t > t_j$ ,

$$X_t^{t_0, x_0} = X_t^{t_j, X_{t_j}^{t_0, x_0}} \quad (15.25)$$

such that

$$\begin{aligned} &\chi(X_{t_1} \in [x_1, x_1 + dx_1)) \cdots \chi(X_{t_n} \in [x_n, x_n + dx_n)) \\ &= \chi(X_{t_1}^{t_0, x_0} \in [x_1, x_1 + dx_1)) \chi(X_{t_2}^{t_1, X_{t_1}} \in [x_2, x_2 + dx_2)) \times \cdots \\ &\quad \cdots \times \chi(X_{t_n}^{t_{n-1}, X_{t_{n-1}}} \in [x_n, x_n + dx_n)) \\ &= \chi(X_{t_1}^{t_0, x_0} \in [x_1, x_1 + dx_1)) \chi(X_{t_2}^{t_1, x_1} \in [x_2, x_2 + dx_2)) \times \cdots \\ &\quad \cdots \times \chi(X_{t_n}^{t_{n-1}, x_{n-1}} \in [x_n, x_n + dx_n)) \end{aligned} \quad (15.26)$$

Therefore (15.24) becomes

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_W \left( X_{t_1} \in [x_1, x_1 + dx_1), \dots, X_{t_n} \in [x_n, x_n + dx_n) \right) & (15.27) \\
&= \int \chi(X_{t_1}^{t_0, x_0} \in [x_1, x_1 + dx_1)) \chi(X_{t_2}^{t_1, x_1} \in [x_2, x_2 + dx_2)) \times \dots \\
&\quad \dots \times \chi(X_{t_n}^{t_{n-1}, x_{n-1}} \in [x_n, x_n + dx_n)) \prod_{j=1}^n dW_{(t_{j-1}, t_j]}^{y_{t_{j-1}}}(\{y_t\}_{t_{j-1} < t \leq t_j}) \\
&\stackrel{(15.23)}{=} \int \prod_{j=1}^n \left\{ \chi(X_{t_j}^{t_{j-1}, x_{j-1}} \in [x_j, x_j + dx_j)) dW_{(t_{j-1}, t_j]}^{y_{t_{j-1}}}(\{y_t\}_{t_{j-1} < t \leq t_j}) \right\} \\
&= \prod_{j=1}^n \mathbb{P}_W(X_{t_j}^{t_{j-1}, x_{j-1}} \in [x_j, x_j + dx_j)) \\
&= p(t_0, x_0; t_1, x_1) p(t_1, x_1; t_2, x_2) \cdots p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

Here we used the fact that, for example,

$$\int \chi(X_{t_n}^{t_{n-1}, x_{n-1}} \in [x_n, x_n + dx_n)) dW_{(t_{n-1}, t_n]}^{y_{t_{n-1}}}(\{y_t\}_{t_{n-1} < t \leq t_n}) \quad (15.28)$$

does not depend on  $y_{t_{n-1}}$ . This proves the lemma ■

### The Ornstein-Uhlenbeck Process

The Ornstein-Uhlenbeck process is the Ito diffusion which is the solution of the SDE

$$dX_t = -c X_t dt + \sigma dB_t \quad (15.29)$$

where  $c$  and  $\sigma$  are some constants. It can be solved explicitly. To this end consider  $Y_t = e^{ct} X_t$  whose differential is given by

$$\begin{aligned}
dY_t &= c e^{ct} X_t dt + e^{ct} dX_t + 0 \\
&= \sigma e^{ct} dB_t
\end{aligned} \quad (15.30)$$

Thus  $Y_t = Y_0 + \sigma \int_0^t e^{cs} dB_s$  or ( $X_0 = x$ )

$$X_t = x e^{-ct} + \sigma \int_0^t e^{-c(t-s)} dB_s \quad (15.31)$$

In particular,

$$\begin{aligned}
X_{t+h} &= e^{-ch} X_t + \sigma \int_t^{t+h} e^{-c(t+h-s)} dB_s \\
&= e^{-ch} X_t + \sigma \int_0^h e^{-c(h-s)} dB_{s+t}
\end{aligned} \quad (15.32)$$

which shows explicitly the Markov property of  $X_t$ . By Lemma 12.3, the Ornstein-Uhlenbeck process is a Gaussian process with mean

$$\mathbf{E}_W[X_t] = x e^{-ct} \quad (15.33)$$

and variance

$$\mathbf{V}_W[X_t] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2c(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2c} (1 - e^{-2ct}) \quad (15.34)$$

Thus,

$$\mathbf{P}_W(X_t \leq a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{c} (1 - e^{-2ct})}} e^{-\frac{(y - x e^{-ct})^2}{\frac{\sigma^2}{c} (1 - e^{-2ct})}} dy \quad (15.35)$$

In particular, since  $X_t$  is time homogenous as the coefficients in (15.29) do not explicitly depend on  $t$ ,

$$\begin{aligned} p(s, x; t, y) dy &= \mathbf{P}_W(X_t^{s,x} \in [y, y + dy]) \\ &= \mathbf{P}_W(X_{t-s}^{0,x} \in [y, y + dy]) \end{aligned} \quad (15.36)$$

which gives the Mehler kernel

$$p(s, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{c} (1 - e^{-2c(t-s)})}} e^{-\frac{(y - x e^{-c(t-s)})^2}{\frac{\sigma^2}{c} (1 - e^{-2c(t-s)})}} \quad (15.37)$$

### Further Examples

Consider the SDE (see [16], exercise 5.16)

$$dX_t = f(t, X_t) dt + c(t) X_t dB_t \quad (15.38)$$

Define the ‘integrating factor’

$$F_t = e^{-\int_0^t c(s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t c^2(s) ds} \quad (15.39)$$

and let

$$Y_t := F_t X_t \quad (15.40)$$

Because of  $(h_t := \int_0^t c(s) dB_s)$

$$\begin{aligned} dF_t &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial h} dh_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} dh_t^2 \\ &= \frac{c_t^2}{2} F_t dt - F_t c_t dB_t + \frac{1}{2} F_t c_t^2 dt \\ &= c_t^2 F_t dt - F_t c_t dB_t \end{aligned} \quad (15.41)$$

we have (the first two lines of (15.42) being more mnemonic)

$$\begin{aligned} d\langle F, X \rangle_t &= dF_t \cdot dX_t \\ &= -F_t c_t dB_t \cdot c_t X_t dB_t \\ &= -c_t^2 F_t X_t dt \end{aligned} \quad (15.42)$$

Thus,

$$\begin{aligned} dY_t &= dF_t X_t + F_t dX_t + d\langle F, X \rangle_t \\ &= c_t^2 F_t X_t dt - c_t F_t X_t dB_t + f(t, X_t) F_t dt + c_t F_t X_t dB_t - c_t^2 F_t X_t dt \\ &= f(t, X_t) F_t dt \\ &= f(t, F_t^{-1} Y_t) F_t dt \end{aligned} \quad (15.43)$$

In particular,

$$d\langle Y \rangle_t = 0 \quad (15.44)$$

As a concrete example consider the SDE

$$dX_t = \mu X_t^\gamma dt + \sigma X_t dB_t \quad (15.45)$$

For  $\gamma = 1$  the solution is a geometric Brownian, so let  $\gamma \neq 1$ . Then

$$F_t = e^{-\sigma B_t + \frac{\sigma^2}{2} t} \quad (15.46)$$

and (15.43) becomes

$$\begin{aligned} dY_t &= \mu F_t^{-\gamma} Y_t^\gamma F_t dt \\ \frac{dY_t}{Y_t^\gamma} &= \mu e^{(1-\gamma)(-\sigma B_t + \frac{\sigma^2}{2} t)} dt \\ \frac{1}{1-\gamma} (Y_t^{1-\gamma} - Y_0^{1-\gamma}) &= \mu \int_0^t e^{(1-\gamma)(-\sigma B_s + \frac{\sigma^2}{2} s)} ds \end{aligned} \quad (15.47)$$

which gives

$$Y_t = \left\{ Y_0^{1-\gamma} + (1-\gamma)\mu \int_0^t e^{(1-\gamma)(-\sigma B_s + \frac{\sigma^2}{2} s)} ds \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

or

$$X_t = X_0 e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t} \left\{ 1 + (1-\gamma)\mu X_0^{\gamma-1} \int_0^t e^{(1-\gamma)(-\sigma B_s + \frac{\sigma^2}{2} s)} ds \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (15.48)$$

For  $\gamma \rightarrow 1$  this converges to

$$\begin{aligned} X_t &\rightarrow X_0 e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t} \left\{ 1 + (1-\gamma)\mu \int_0^t ds \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \\ &\rightarrow X_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) t} \end{aligned}$$

which is geometric Brownian motion as it should be. The Markov property of  $X_t$  can be seen from

$$X_{t+h}^{1-\gamma} = e^{(1-\gamma)(\sigma(B_{t+h}-B_t)-\frac{\sigma^2}{2}h)} X_t^{1-\gamma} + (1-\gamma)\mu \int_t^{t+h} e^{(1-\gamma)(-\sigma B_s+\frac{\sigma^2}{2}s)} ds \quad (15.49)$$

which shows that, once  $X_t$  is fixed,  $X_{t+h}$  does not depend on  $\{X_s\}_{0 \leq s < t}$  or  $\{B_s\}_{0 \leq s < t}$ .

### Feynman-Kac Formel

Wir betrachten einen 1-dimensionalen Ito-Diffusionsprozess gegeben durch

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dB_t \quad (15.50)$$

mit  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung (in Kapitel 4 hatten wir immer die Notation  $x_t$  für die Brownsche Bewegung, die Buchstaben  $x$  und  $X$  wollen wir hier für den Diffusionsprozess oder für Startwerte davon verwenden). Es sei  $T > 0$  ein fest vorgegebener Zeithorizont und  $f = f(x)$  sei eine beliebig vorgegebene Funktion von einer Variablen (typischer Fall:  $f = H$  eine Optionsauszahlung),

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Wir geben uns eine Zeit

$$t \in [0, T]$$

vor und wir geben uns einen Startwert  $x \in \mathbb{R}$  für den Diffusionsprozess  $X_t$  vor,

$$X_t = x$$

Wir betrachten den Erwartungswert

$$u(x, t) := \mathbf{E}_t[f(X_T)] \quad (15.51)$$

wobei die Notation  $\mathbf{E}_t[\cdot]$  meint, dass alle Zufallszahlen von  $T$  bis runter zu  $t < T$  integriert werden. Das  $u$  hängt nicht nur von dem kleinen  $t$  ab, sondern auch von dem grossen  $T$ , diese Abhängigkeit wollen wir aber nicht explizit machen. Wenn der Startwert  $X_t = x$  zur Zeit  $t$  fest vorgegeben ist, dann ist das  $u(x, t)$  eine deterministische Funktion. Wir können jetzt aber auch noch eine zweite Zeit  $s$  mit

$$0 \leq s < t < T$$



vorgeben und für das  $x$  in dem  $u(x, t)$  den stochastischen Prozess  $X_t$  einsetzen, dann bekommen wir eine zufällige Grösse, einen neuen stochastischen Prozess, den wir mit  $M_t$  bezeichnen wollen:

$$M_t := u(X_t, t) = \mathbb{E}_t[f(X_T)] \quad (15.52)$$

Und jetzt wollen wir alle Zufallszahlen bis zur Zeit  $s < t$  ausintegrieren. Dann bekommen wir offensichtlich

$$\mathbb{E}_s[M_t] = \mathbb{E}_s[\mathbb{E}_t[f(X_T)]] \stackrel{s < t}{=} \mathbb{E}_s[f(X_T)] \stackrel{(15.51)}{=} u(X_s, s) \stackrel{(15.52)}{=} M_s \quad (15.53)$$

Das heisst, der Prozess  $M_t = u(X_t, t)$  erfüllt die Gleichung ( $s < t$ )

$$\mathbb{E}_s[M_t] = M_s \quad (15.54)$$

und ist damit ein Martingal.

Auf die Funktion  $u(X_t, t)$  können wir jetzt die Ito-Formel anwenden. Wir bekommen:

$$du(X_t, t) = \frac{\partial u}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (dX_t)^2 + \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (15.55)$$

Mit den Rechenregeln für die Brownsche Bewegung aus dem 4. Kapitel erhalten wir

$$\begin{aligned} (dX_t)^2 &= \{a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dB_t\}^2 \\ &= b^2(X_t, t) dt \end{aligned} \quad (15.56)$$

Das setzen wir in (15.55) ein und erhalten

$$\begin{aligned} du(X_t, t) &\stackrel{(15.56)}{=} \frac{\partial u}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} b^2 dt + \frac{\partial u}{\partial t} dt \\ &\stackrel{(15.50)}{=} \frac{\partial u}{\partial x} \{a dt + b dB_t\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} b^2 dt + \frac{\partial u}{\partial t} dt \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} dt + b \frac{\partial u}{\partial x} dB_t \end{aligned} \quad (15.57)$$

Da der Prozess  $M_t = u(X_t, t)$  ein Martingal ist, muss gelten:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \mathbb{E}_t[dM_t] = \mathbb{E}_t[du(X_t, t)] \\ &= \mathbb{E}_t \left[ \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} dt + b \frac{\partial u}{\partial x} dB_t \right] \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} (X_t, t) dt \end{aligned} \quad (15.58)$$

Mit anderen Worten, die Funktion  $u(x, t)$  gegeben durch

$$u(x, t) := \mathbf{E}_t[f(X_T)] \Big|_{X_t=x} \quad (15.59)$$

muss eine Lösung der folgenden PDE

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b^2(x, t)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (15.60)$$

mit final condition

$$u(x, T) = f(x)$$

sein. Ursprünglich wurde die Tatsache, dass man die Lösung der PDE (15.60) (in der Physik hat man da dann die Schrödinger-Gleichung) als ein Erwartungswert bezüglich des Wiener-Masses schreiben kann (in der Physik heissen diese Erwartungswerte dann Pfad-Integrale) als Feynman-Kac Formel bezeichnet. Inzwischen, wenn man Feynman-Kac Formel sagt, meint man typischerweise die Äquivalenz von (15.59) und (15.60).

### Beispiele zur Feynman-Kac Formel

Beispiel 1: Wir wählen  $a = 0$  und  $b = 1$ . In dem Fall lautet die SDE (15.50)

$$dX_t = dB_t$$

und wird gelöst von

$$X_t = X_0 + B_t$$

Die Funktion  $u(x, t)$  ist gegeben durch (15.51),

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathbf{E}_t[f(X_T)] \\ &= \mathbf{E}_t[f(X_0 + B_T)] \\ &= \mathbf{E}_t[f(X_0 + B_t + B_T - B_t)] \\ &= \mathbf{E}_t[f(X_t + B_T - B_t)] \\ &= \mathbf{E}_t[f(x + B_T - B_t)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x + \sqrt{T-t}y) e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Dieses  $u$  muss eine Lösung von (15.60) sein,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

mit final condition

$$u(x, T) = f(x)$$

Wegen

$$u(x, T) = \int_{\mathbb{R}} f(x + \sqrt{0}y) e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = f(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = f(x)$$

ist die final condition offensichtlich erfüllt. Das Bestehen der PDE, für beliebiges  $f$ , kann man mit der Variablensubstitution  $y \rightarrow v := x + \sqrt{T-t}y$  verifizieren.

Beispiel 2: Wir wählen  $b = 0$ . In dem Fall lautet die SDE (15.50)

$$dX_t = a(X_t, t) dt$$

und ist vollständig deterministisch. Die Funktion  $u(x, t)$  ist gegeben durch

$$u(x, t) = \mathbb{E}_t[f(X_T)] = f(X_T)$$

wobei  $X_T$  die Lösung der ODE

$$\dot{X}_s = a(X_s, s)$$

mit Anfangsbedingung

$$X_t = x$$

Die PDE (15.60) wird zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

und ist äquivalent zu

$$f'(X_T) \frac{\partial X_T}{\partial t} + a(x, t) f'(X_T) \frac{\partial X_T}{\partial x} = 0$$

oder

$$\frac{\partial X_T}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial X_T}{\partial x} = 0 \tag{15.61}$$

Checken wir (15.61) für die beiden Fälle  $a = a(t)$  und  $a = a(x)$ . Im Fall  $a = a(t)$  haben wir

$$dX_t = a(t) dt$$

und bekommen

$$X_T - X_t = \int_t^T a(s) ds$$

oder, mit  $X_t = x$ ,

$$X_T = x + \int_t^T a(s) ds$$

Also,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_T}{\partial t} &= -a(t) \\ \frac{\partial X_T}{\partial x} &= 1 \end{aligned}$$

und damit ist (15.61) erfüllt. Im Fall  $a = a(x)$  haben wir

$$dX_t = a(X_t) dt$$

und können schreiben

$$\int_{X_t}^{X_T} \frac{dx}{a(x)} = T - t$$

Wenn wir die Stammfunktion von  $1/a(x)$  mit  $F(x)$  bezeichnen, bekommen wir also

$$F(X_T) - F(X_t) = T - t$$

oder, wieder mit  $X_t = x$ ,

$$X_T = F^{-1}\left(F(x) + T - t\right) = G\left(F(x) + T - t\right)$$

wobei  $G := F^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $F(x)$  bezeichnet. Also,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_T}{\partial t} &= -G'\left(F(x) + T - t\right) \\ \frac{\partial X_T}{\partial x} &= G'\left(F(x) + T - t\right) \times F'(x) \end{aligned}$$

und damit ist (15.61) äquivalent zu

$$-1 + a(x) F'(x) = 0$$

und diese Gleichung ist erfüllt, da  $F$  ja die Stammfunktion von  $1/a(x)$  ist, also  $F'(x) = 1/a(x)$ .