week9a: Kapitel 5.3: Die Maximum Likelihood Methode für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess

Beispiel 3 (OU-Prozess): Wir diskretisieren das Zeitintervall $[0, T]$ mit einem Δt gemäss

$$[0, T] \;\approx\; \big\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, n\Delta t\big\} \;=:\; \{t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n = T\}$$

mit $t_k = k\Delta t$ und Zeithorizont $T = t_n = n\Delta t$. Ein zeitdiskreter Ornstein-Uhlenbeck oder kurz OU-Prozess $\{x_{t_k}\}_{k=0}^{n}$ war dann gegeben durch die stochastische Rekursion

$$x_{t_k} \;=\; x_{t_{k-1}} \;+\; \kappa(\mu - x_{t_{k-1}})\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \tag{1}$$

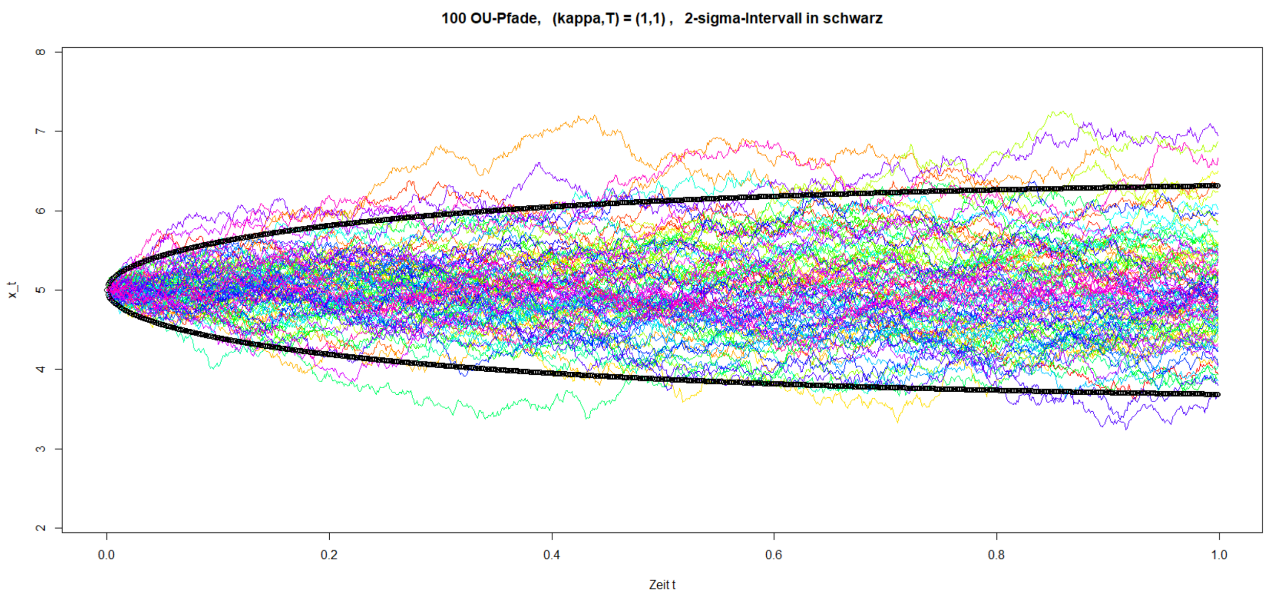
mit standard-normalverteilten Zufallszahlen ϕ_k und einem deterministisch vorgegebenen Startwert $x_{t_0} = x_0$, etwa $x_0 = \mu$. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \alpha &:= 1 - \kappa\,\Delta t \\ \beta &:= \kappa\,\mu\,\Delta t \\ \eta &:= \sigma\sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

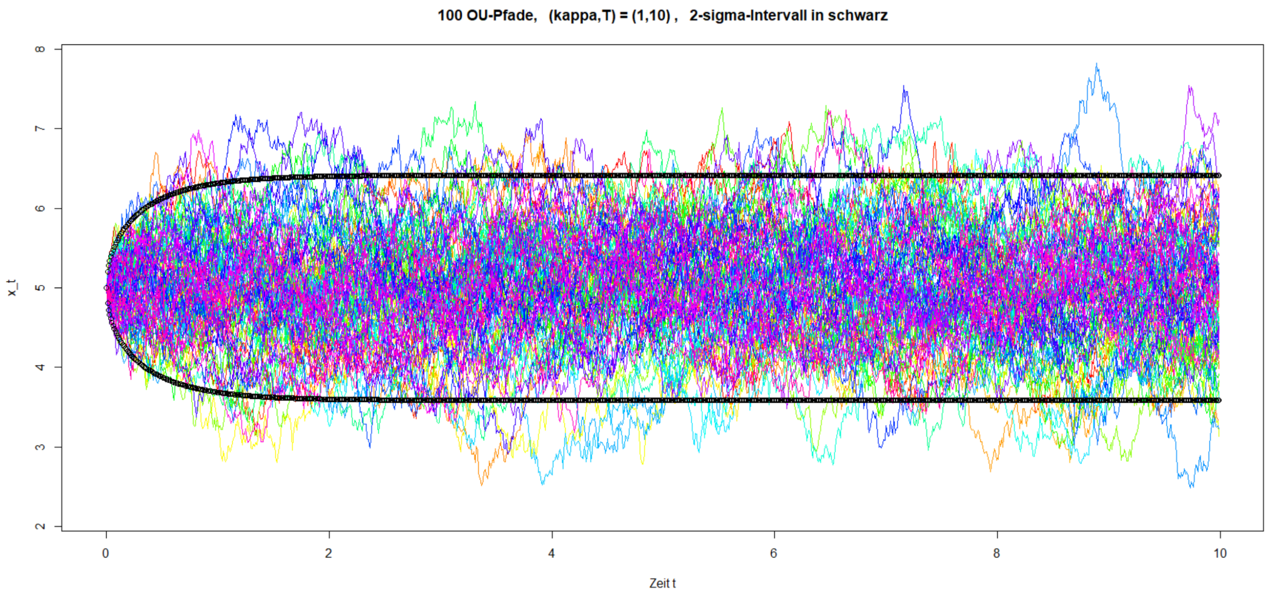
ist das dann äquivalent zu der folgenden Rekursionsvorschrift:

$$x_{t_k} \;=\; \alpha\, x_{t_{k-1}} \;+\; \beta \;+\; \eta\,\phi_k \tag{2}$$

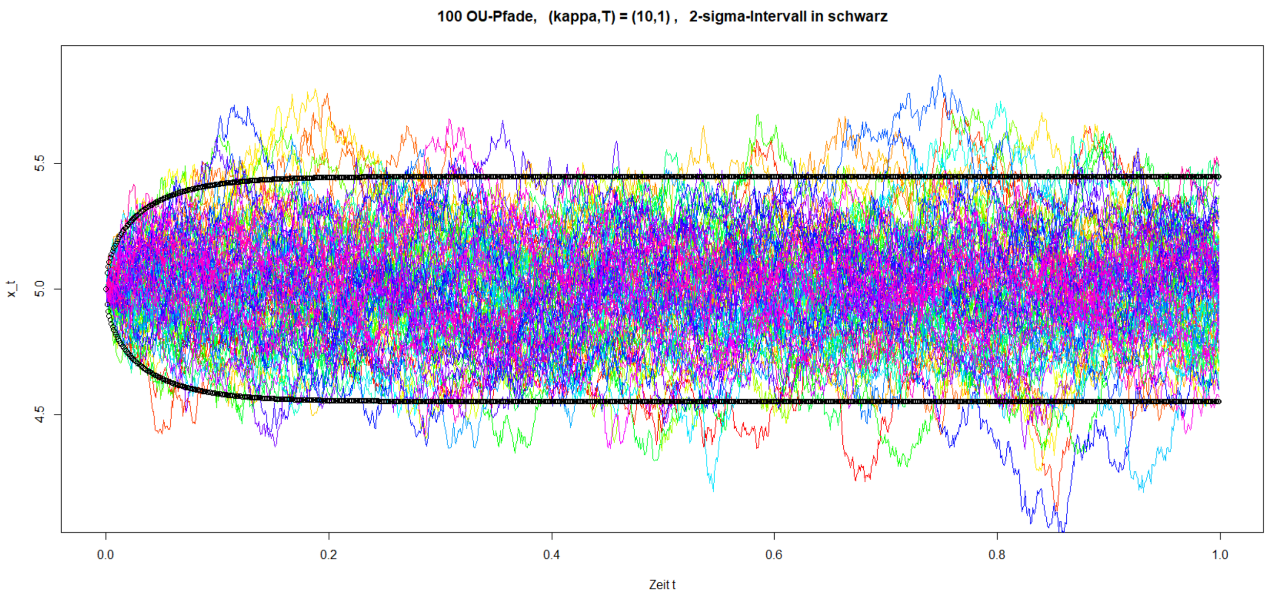
Schauen wir uns zunächst mal ein paar Pfade an:



100 OU-Pfade für $(\kappa, T) = (1, 1)$ und $\mu = 5$ und $\sigma = 1$



100 OU-Pfade für $(\kappa, T) = (1, 10)$ und $\mu = 5$ und $\sigma = 1$



100 OU-Pfade für $(\kappa, T) = (10, 1)$ und $\mu = 5$ und $\sigma = 1$

Auf dem Übungsblatt 7 haben wir in der zweiten Aufgabe gezeigt, dass $\mathsf{E}[x_{t_k}] = \mu$ falls $x_0 = \mu$ gewählt wird, und dass im Limes $\Delta t \to 0$

$$\mathsf{V}[\,x_{t_k}\,] \;=\; \tfrac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 \,-\, e^{-2\kappa t_k}\right) \tag{3}$$

gilt. Die schwarzen Kurven in den Bildern sind dann gegeben durch due Ausdrücke

$$\text{2-Sigma-Intervall} \;:=\; \mathsf{E}[\,x_{t_k}\,] \,\pm\, 2\sqrt{\mathsf{V}[\,x_{t_k}\,]} \;=\; \mu \,\pm\, 2\sqrt{\tfrac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 \,-\, e^{-2\kappa t_k}\right)} \tag{4}$$

Das 'Sigma' in '2-Sigma-Intervall' bezieht sich also nicht auf den Modellparameter σ, sondern das meint einfach 2 mal Standardabweichung und das Wort 'Standardabweichung' wird mitunter auch einfach durch das Wort 'Sigma' abgekürzt.

Zurück zum eigentlichen Problem: Wir haben Zeitreihendaten $\{x_{t_k}\}_{k=1}^n$, die mit Hilfe eines OU-Prozesses generiert worden sind, wir kennen aber die Parameter (κ, μ, σ) oder (α, β, η) nicht und wir möchten sie aus den Zeitreihendaten zurückgewinnen, wie können wir das machen?

Lösung 3: Wenn $x_{t_{k-1}}$ gegeben ist, ist gemäss Gleichung (2) das x_{t_k} normalverteilt mit Mittelwert $\alpha x_{t_{k-1}} + \beta$ und Standardabweichung η. Die W'keit, dass sich das x_{t_k} in einem Intervall $[\tilde{x}_{t_k}, \tilde{x}_{t_k} + d\tilde{x}_{t_k})$ realisieren tut, bei bekanntem $x_{t_{k-1}}$, ist also gegeben durch

$$\mathsf{Prob}\big[\, x_{t_k} \in [\tilde{x}_{t_k}, \tilde{x}_{t_k} + d\tilde{x}_{t_k}) \,\big|\, x_{t_{k-1}} \,\big] \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}}\, e^{-\frac{(\tilde{x}_{t_k} - [\alpha x_{t_{k-1}} + \beta])^2}{2\eta^2}} \; d\tilde{x}_{t_k}$$

Durch wiederholte Anwendung von

$$\mathsf{Prob}[\, A \cap B \,] = \mathsf{Prob}[\, A \,|\, B \,] \times \mathsf{Prob}[\, B \,]$$

bekommen wir dann

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Prob}\Big[\, x_{t_n} \in [\tilde{x}_{t_n}, \tilde{x}_{t_n} + d\tilde{x}_{t_n}) \,,\, x_{t_{n-1}} \in [\tilde{x}_{t_{n-1}}, \tilde{x}_{t_{n-1}} + d\tilde{x}_{t_{n-1}}) \,,\, \cdots \,,\, x_{t_1} \in [\tilde{x}_{t_1}, \tilde{x}_{t_1} + d\tilde{x}_{t_1}) \,\Big] \\
&= \mathsf{Prob}\Big[\, x_{t_n} \in [\tilde{x}_{t_n}, \tilde{x}_{t_n} + d\tilde{x}_{t_n}) \,\Big|\, x_{t_{n-1}} \in [\tilde{x}_{t_{n-1}}, \tilde{x}_{t_{n-1}} + d\tilde{x}_{t_{n-1}}) \,,\, \cdots \,,\, x_{t_1} \in [\tilde{x}_{t_1}, \tilde{x}_{t_1} + d\tilde{x}_{t_1}) \,\Big] \\
&\times \mathsf{Prob}\Big[\, x_{t_{n-1}} \in [\tilde{x}_{t_{n-1}}, \tilde{x}_{t_{n-1}} + d\tilde{x}_{t_{n-1}}) \,,\, \cdots \,,\, x_{t_1} \in [\tilde{x}_{t_1}, \tilde{x}_{t_1} + d\tilde{x}_{t_1}) \,\Big] \\
&= \mathsf{Prob}\Big[\, x_{t_n} \in [\tilde{x}_{t_n}, \tilde{x}_{t_n} + d\tilde{x}_{t_n}) \,\Big|\, x_{t_{n-1}} \in [\tilde{x}_{t_{n-1}}, \tilde{x}_{t_{n-1}} + d\tilde{x}_{t_{n-1}}) \,,\, \cdots \,,\, x_{t_1} \in [\tilde{x}_{t_1}, \tilde{x}_{t_1} + d\tilde{x}_{t_1}) \,\Big] \\
&\times \mathsf{Prob}\Big[\, x_{t_{n-1}} \in [\tilde{x}_{t_{n-1}}, \tilde{x}_{t_{n-1}} + d\tilde{x}_{t_{n-1}}) \,\Big|\, x_{t_{n-2}} \in [\tilde{x}_{t_{n-2}}, \tilde{x}_{t_{n-2}} + d\tilde{x}_{t_{n-2}}) \,,\, \cdots \,,\, x_{t_1} \in [\tilde{x}_{t_1}, \tilde{x}_{t_1} + d\tilde{x}_{t_1}) \,\Big] \\
&\times \mathsf{Prob}\Big[\, x_{t_{n-2}} \in [\tilde{x}_{t_{n-2}}, \tilde{x}_{t_{n-2}} + d\tilde{x}_{t_{n-2}}) \,,\, \cdots \,,\, x_{t_1} \in [\tilde{x}_{t_1}, \tilde{x}_{t_1} + d\tilde{x}_{t_1}) \,\Big]
\end{aligned}$$

und wenn wir das immer so weiter machen

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Prob}\Big[\, x_{t_n} \in [\tilde{x}_{t_n}, \tilde{x}_{t_n} + d\tilde{x}_{t_n}) \,,\, x_{t_{n-1}} \in [\tilde{x}_{t_{n-1}}, \tilde{x}_{t_{n-1}} + d\tilde{x}_{t_{n-1}}) \,,\, \cdots \,,\, x_{t_1} \in [\tilde{x}_{t_1}, \tilde{x}_{t_1} + d\tilde{x}_{t_1}) \,\Big] \\
&= \prod_{k=1}^n \mathsf{Prob}\Big[\, x_{t_k} \in [\tilde{x}_{t_k}, \tilde{x}_{t_k} + d\tilde{x}_{t_k}) \,\Big|\, x_{t_{k-1}} \in [\tilde{x}_{t_{k-1}}, \tilde{x}_{t_{k-1}} + d\tilde{x}_{t_{k-1}}) \,,\, \cdots \,,\, x_{t_1} \in [\tilde{x}_{t_1}, \tilde{x}_{t_1} + d\tilde{x}_{t_1}) \,\Big] \\
&= \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}}\, e^{-\frac{(\tilde{x}_{t_k} - [\alpha \tilde{x}_{t_{k-1}} + \beta])^2}{2\eta^2}} \; d\tilde{x}_{t_k}
\end{aligned}$$

Für die $\tilde{x}_{t_k}$ können wir wieder die realisierten Zeitreihendaten einsetzen und erhalten so wieder eine Funktion, die nur von den Modell-Parametern (α, β, η) abhängt, das ist dann also wieder die Likelihood-Funktion:

$$L(\alpha, \beta, \eta) \;:=\; \frac{1}{(2\pi\eta^2)^{n/2}}\; \exp\Big\{ -\frac{1}{2\eta^2} \sum_{k=1}^n \big(x_{t_k} - [\alpha x_{t_{k-1}} + \beta] \big)^2 \Big\} \; \prod_{k=1}^n dx_{t_k}$$

oder

$$\log L \;=\; -n \log \eta \;-\; \frac{1}{2\eta^2} \sum_{k=1}^n \big(x_{t_k} - [\alpha x_{t_{k-1}} + \beta] \big)^2 \;+\; \text{const} \;=\; \log L(\alpha, \beta, \eta)$$

mit der Konstanten

$$\text{const} \;:=\; -\frac{n}{2}\log(2\pi) \;+\; \log\prod_{k=1}^{n} dx_{t_k}$$

Wir maximieren $\log L$. Dazu berechnen wir wieder den Gradienten und setzen den gleich 0. Wir haben

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\log L &= +\frac{1}{\eta^2}\sum_{k=1}^{n}\big(x_{t_k} - [\alpha x_{t_{k-1}} + \beta]\big)\,x_{t_{k-1}} \;\overset{!}{=}\; 0 \\
\frac{\partial}{\partial\beta}\log L &= +\frac{1}{\eta^2}\sum_{k=1}^{n}\big(x_{t_k} - [\alpha x_{t_{k-1}} + \beta]\big) \;\overset{!}{=}\; 0 \\
\frac{\partial}{\partial\eta}\log L &= -\frac{n}{\eta} + \frac{1}{\eta^3}\sum_{k=1}^{n}\big(x_{t_k} - [\alpha x_{t_{k-1}} + \beta]\big)^2 \;\overset{!}{=}\; 0
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\alpha\sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}}^2 \;+\; \beta\sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}} &= \sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}}x_{t_k} \\
\alpha\sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}} \;+\; \beta\, n &= \sum_{k=1}^{n} x_{t_k}
\end{aligned}$$

und

$$\eta^2 \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(x_{t_k} - [\alpha x_{t_{k-1}} + \beta]\big)^2$$

Die ersten beiden Gleichungen sind ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A\binom{\alpha}{\beta} \;=\; b$$

mit

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}}^2 & \sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}} \\ \sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}} & n \end{pmatrix}$$

und der rechten Seite

$$b \;=\; \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}}x_{t_k} \\ \sum_{k=1}^{n} x_{t_k} \end{pmatrix}$$

Wir bekommen dann also

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha}{\beta} &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}}^2 & \sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}} \\ \sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}} & n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}}x_{t_k} \\ \sum_{k=1}^{n} x_{t_k} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n\sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}}^2 - \big(\sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}}\big)^2} \begin{pmatrix} n & -\sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}} \\ -\sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}} & \sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_{t_{k-1}}x_{t_k} \\ \sum_{k=1}^{n} x_{t_k} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

oder, wenn wir jetzt wieder Hüte nehmen, da wir Schätzer $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\eta})$ für die Modellparameter (α, β, η) haben,

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} = \frac{n\sum_{k=1}^n x_{t_{k-1}} x_{t_k} - \sum_{k=1}^n x_{t_{k-1}} \sum_{k=1}^n x_{t_k}}{n\sum_{k=1}^n x_{t_{k-1}}^2 - \big(\sum_{k=1}^n x_{t_{k-1}}\big)^2} \tag{5}$$

$$\hat{\beta}_{\mathrm{ML}} = \frac{\sum_{k=1}^n x_{t_{k-1}}^2 \sum_{k=1}^n x_{t_k} - \sum_{k=1}^n x_{t_{k-1}} x_{t_k} \sum_{k=1}^n x_{t_{k-1}}}{n\sum_{k=1}^n x_{t_{k-1}}^2 - \big(\sum_{k=1}^n x_{t_{k-1}}\big)^2} \tag{6}$$

und damit dann

$$\hat{\eta}_{\mathrm{ML}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \Big(x_{t_k} - \big[\, \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}\, x_{t_{k-1}} + \hat{\beta}_{\mathrm{ML}} \,\big] \Big)^2 \tag{7}$$

und können dann gemäss

$$\hat{\kappa}_{\mathrm{ML}} = \frac{1-\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}}{\Delta t} \tag{8}$$

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ML}} = \frac{\beta}{\kappa \Delta t} = \frac{\hat{\beta}_{\mathrm{ML}}}{1-\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}} \tag{9}$$

$$\widehat{\sigma^2}_{\mathrm{ML}} = \frac{\widehat{\eta^2}_{\mathrm{ML}}}{\Delta t} \tag{10}$$

die Modell-Parameter (κ, μ, σ) berechnen.

Okay, schauen wir uns mal an, wie gut das so hinkommt. Wir betrachten wieder die 3 Fälle

$$\begin{aligned} (\kappa, T) &= (1, 10) \\ (\kappa, T) &= (10, 1) \\ (\kappa, T) &= (1, 1) \end{aligned} \tag{11}$$

und lassen das μ und das σ fest auf den Werten

$$\begin{aligned} \mu &= 5 \\ \sigma &= 1 \end{aligned}$$

Für jeden Fall in (11) simulieren wir jeweils $N = 10000$ Pfade und für jeden Pfad berechnen wir dann die Modellparameter gemäss der obigen Formeln für $(\hat{\kappa}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$. Wir wollen ebenfalls die Abhängigkeit der Resultate von der Anzahl n der Zeitreihendaten untersuchen. Dazu wählen wir zu gegebenen Zeithorizont T das Δt so, dass wir einmal $n = 1000$ Zeitreihendaten bekommen und zum anderen $n = 10000$ Zeitreihendaten. Also konkret, für $T = 1$ wählen wir

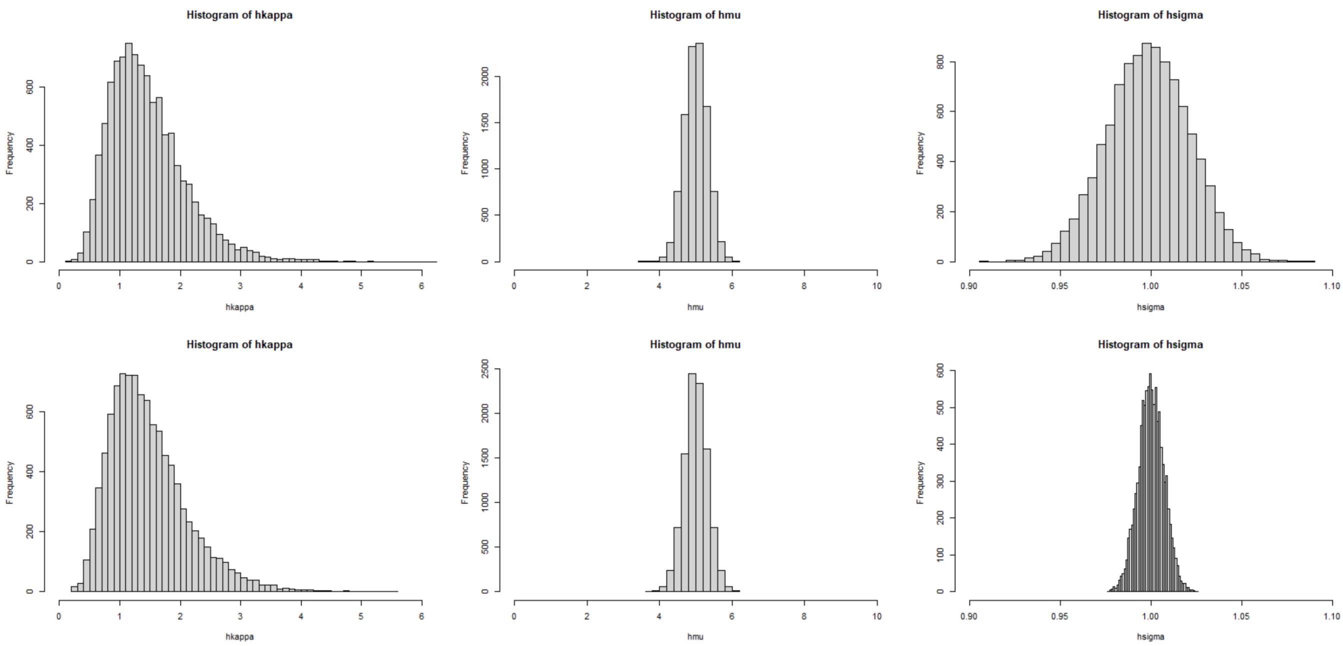
Für $T = 1$: $$\Delta t \in \left\{ \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000} \right\}$$

und für $T = 10$ wählen wir

Für $T = 10$: $$\Delta t \in \left\{ \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \right\}$$

Wir bekommen dann die folgenden Resultate:

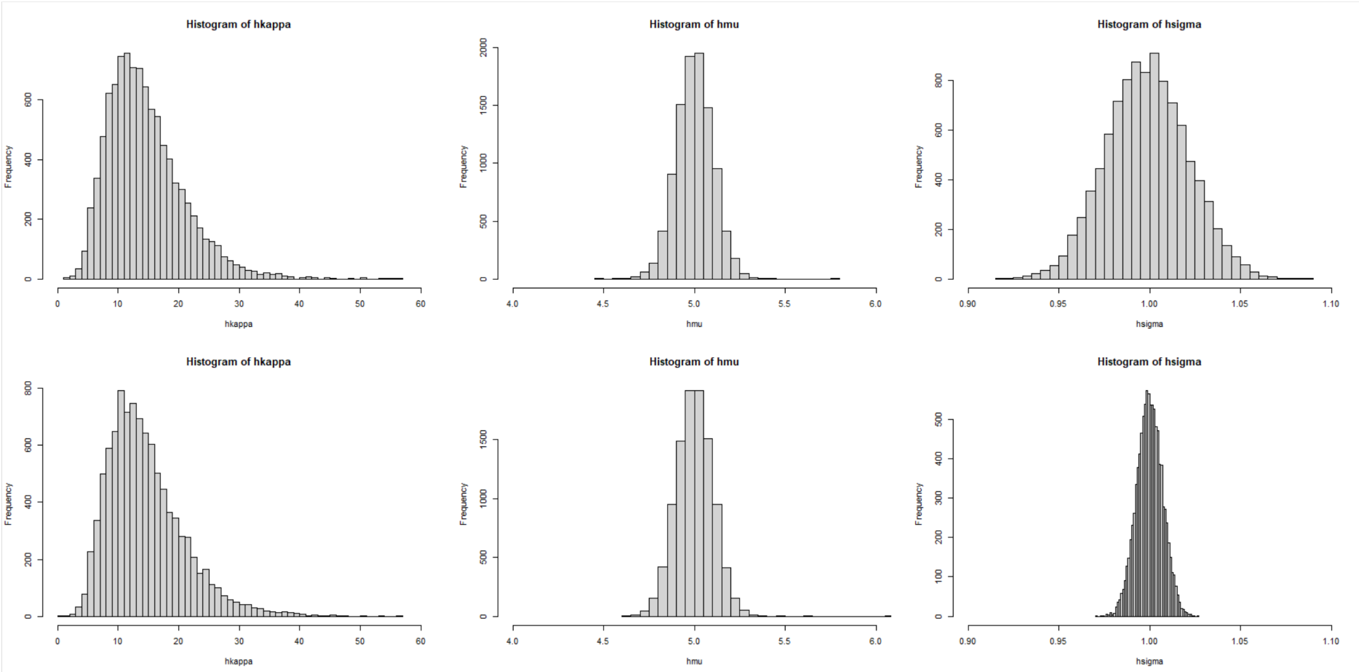
Für $(\kappa, T) = (1, 10)$: $\mu = 5, \sigma = 1$



$(\hat{\kappa}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ für $n = 1000$ (obere Zeile) und $n = 10000$ (untere Zeile) Zeitreihendaten

```
# (kappa,T) = (1,10)

# Mit n=1000 Zeitreihendaten:

> dt = 0.01
> summary(hkappa)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.1400  0.9893  1.3314  1.4410  1.7764  5.6373
> summary(hmu)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  3.683   4.787   5.005   5.000   5.207   6.583
> summary(hsigma)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.9132  0.9839  0.9988  0.9989  1.0140  1.0891

# Mit n=10000 Zeitreihendaten:

> dt = 0.001
> summary(hkappa)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.1671  1.0061  1.3479  1.4525  1.7827  5.2717
> summary(hmu)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  3.803   4.783   4.994   4.993   5.206   6.187
> summary(hsigma)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.9692  0.9951  1.0000  0.9999  1.0047  1.0250
```

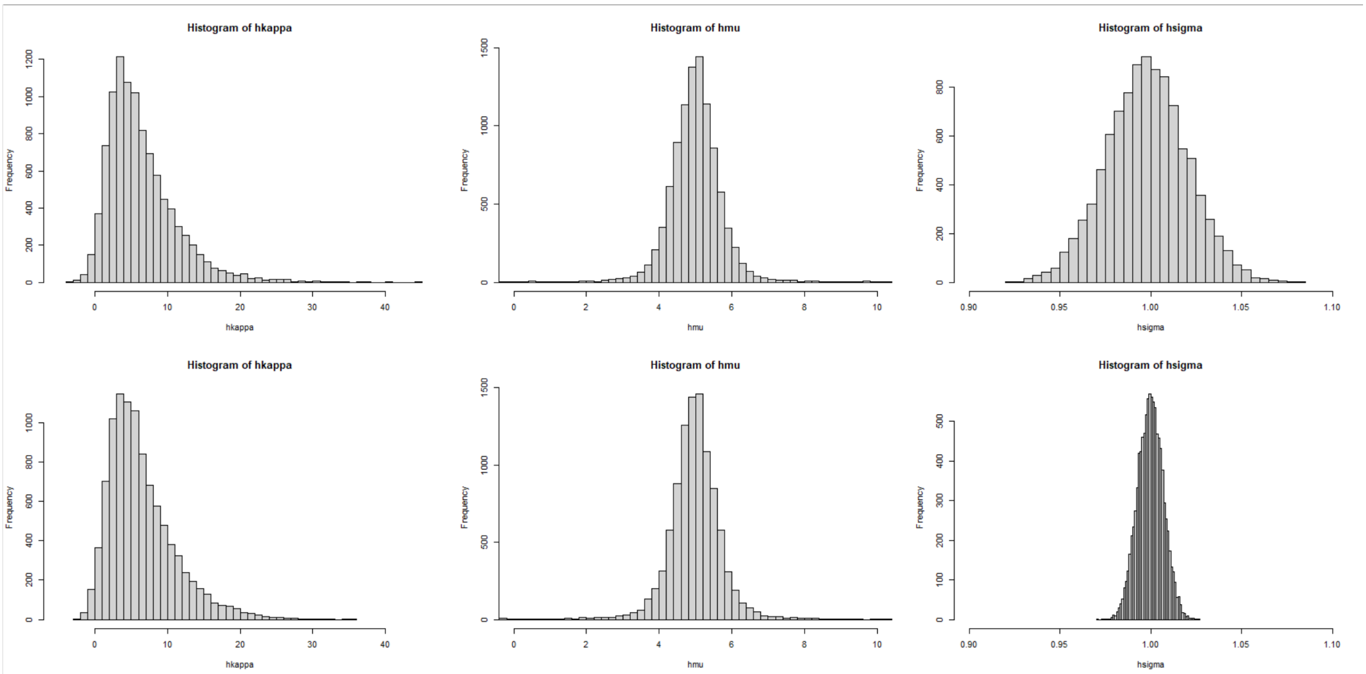
Für $\underline{(\kappa, T) = (10, 1):}$ $\quad \mu = 5, \sigma = 1$



$(\hat{\kappa}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ für $n = 1000$ (obere Zeile) und $n = 10000$ (untere Zeile) Zeitreihendaten

```
# (kappa,T) = (10,1)

# Mit n=1000 Zeitreihendaten:

> dt = 0.001
> summary(hkappa)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  2.108  10.020  13.548  14.612  18.076  48.466
> summary(hmu)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  4.570   4.935   5.001   5.000   5.067   5.456
> summary(hsigma)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.9136  0.9833  0.9983  0.9983  1.0137  1.0855

# Mit n=10000 Zeitreihendaten:

> dt = 0.0001
> summary(hkappa)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  1.759  10.013  13.461  14.521  17.887  58.886
> summary(hmu)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  4.589   4.932   4.999   4.999   5.065   5.371
> summary(hsigma)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.9689  0.9951  0.9999  0.9999  1.0046  1.0255
```

<u>Für $(\kappa, T) = (1, 1)$:</u> $\mu = 5, \sigma = 1$



$(\hat{\kappa}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ für $n = 1000$ (obere Zeile) und $n = 10000$ (untere Zeile) Zeitreihendaten

```
# (kappa,T) = (1,1)

# Mit n=1000 Zeitreihendaten:

> dt = 0.001
> summary(hkappa)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 -3.041   3.198   5.528   6.515   8.751  42.654
> summary(hmu)
    Min.  1st Qu.   Median     Mean  3rd Qu.     Max.
-470.238    4.632    5.005    4.863    5.374  137.887
> summary(hsigma)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.9256  0.9825  0.9977  0.9978  1.0126  1.0776

# Mit n=10000 Zeitreihendaten:

> dt = 0.0001
> summary(hkappa)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 -3.041   3.172   5.513   6.509   8.723  42.212
> summary(hmu)
    Min.  1st Qu.   Median     Mean  3rd Qu.     Max.
-425.271    4.633    4.997    4.924    5.378  173.752
> summary(hsigma)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.9736  0.9951  0.9999  0.9999  1.0047  1.0264
```

Beobachtungen: Halten wir vielleicht noch die folgenden Beobachtungen fest:

(i) Für $(\kappa, T) = (1,1)$ wird der Schätzer für das κ sehr schlecht. Auch die Summary-Daten für das $\hat{\mu}$ sehen nicht sehr schön aus. Das wird daran liegen, dass für $\kappa = 1$ der Zeithorizont $T = 1$ zu klein ist, als dass die Pfade das 'Mean-Reversion-Regime' erreichen können, das wäre der Bereich, in dem das 2-Sigma-Intervall durch horizontale Linien gegeben ist, und nicht durch eine Parabel.

(ii) In allen 3 Fällen sind die Histogramme für $\hat{\kappa}$ und $\hat{\mu}$ im wesentlichen unabhängig von der Anzahl n der Zeitreihendaten, wohingegen der Schätzer für das σ immer genauer wird mit wachsendem n. Der Schätzer $\hat{\sigma}$ ist konsistent, seine Varianz geht nach 0 wenn mehr Daten benutzt werden, aber die Schätzer $\hat{\kappa}$ und $\hat{\mu}$ sind nicht konsistent, ihre Varianzen gehen nicht nach 0, wenn die Anzahl n der Zeitreihendaten nach unendlich geht (sofern der Zeithorizont T festgehalten wird). Dieses Verhalten werden wir im Kapitel 7.3 genauer verstehen können, wo wir mit der Cramer-Rao Abschätzung eine allgemeine untere Schranke für die Varianzen von erwartungstreuen Schätzern angeben können. Die Schätzer $\hat{\sigma}$ und $\hat{\mu}$ scheinen erwartungstreu zu sein, aber das $\hat{\kappa}$ ist sicherlich nicht erwartungstreu.

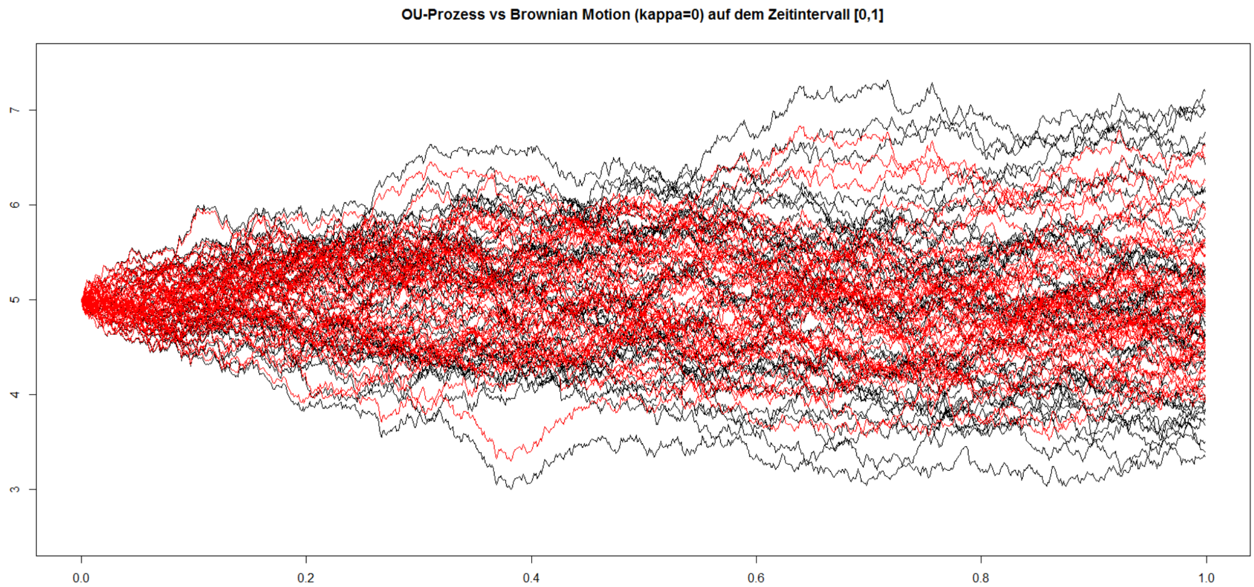
Wir wollen uns den Satz "Das wird daran liegen, dass für $\kappa = 1$ der Zeithorizont $T = 1$ zu klein ist, als dass die Pfade das 'Mean-Reversion-Regime' erreichen können" aus der Beobachtung (i) noch an Hand von 2 Bildern verdeutlichen: Dazu halten wir die Parameter $(\mu, \sigma) = (5, 1)$ wieder fest und variieren das κ und das T. Für festes T generieren wir jeweils 50 Pfade mit $\kappa = 1$ und 50 Pfade mit $\kappa = 0$. Für $\kappa = 0$ lautet die Rekursionsvorschrift einfach

$$\begin{aligned} x_{t_k} \quad &= \quad x_{t_{k-1}} \;+\; \kappa(\mu - x_{t_{k-1}})\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \\ &\overset{\kappa=0,\,\sigma=1}{=} \quad x_{t_{k-1}} \;+\; \sqrt{\Delta t}\,\phi_k \end{aligned}$$

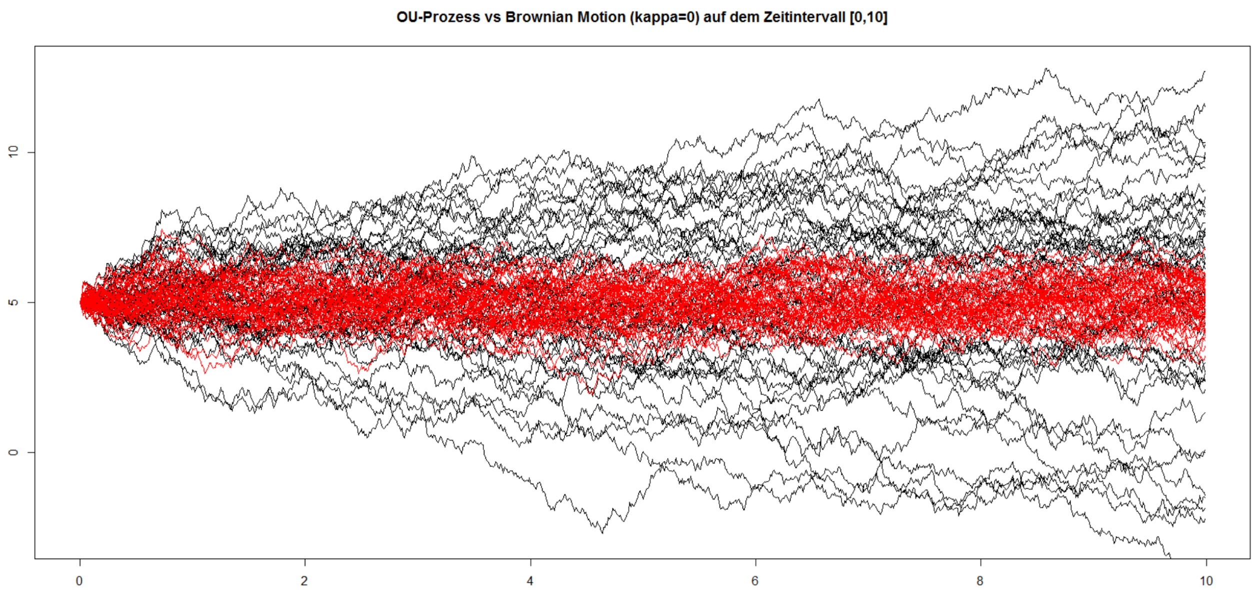
und wird gelöst von

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k} \phi_j \tag{12}$$

Diese Summe von standard-normalverteilten Zufallszahlen mit dem Skalierungsfaktor $\sqrt{\Delta t}$ wird auch als eine Brownsche Bewegung bezeichnet (in diskreter Zeit). In den folgenden beiden Diagrammen vergleichen wir jeweils 50 Pfade einer Brownschen Bewegung, in schwarz, mit 50 OU-Pfaden, in rot. Dabei wurden jeweils dieselben $\{\phi_k\}_{k=1}^{n}$ benutzt:



50 OU-Pfade mit $\kappa = 1$ und $\sigma = 1$ (in rot) und 50 Brownsche Bewegungen (in schwarz) auf $[0, T] = [0, 1]$



50 OU-Pfade mit $\kappa = 1$ und $\sigma = 1$ (in rot) und 50 Brownsche Bewegungen (in schwarz) auf $[0, T] = [0, 10]$

Für kleinere t_k's sind also OU-Pfade mit $\kappa = 1$ und OU-Pfade mit $\kappa = 0$, das sind dann Brownsche Bewegungen, nicht sehr verschieden und dann ist es natürlich nicht erstaunlich, dass, was immer man für eine statistische Methode auch nimmt, das κ nicht sehr gut identifiziert werden kann, die Daten sind ganz einfach nicht sensitiv genug bezüglich einer Variation von κ.

Die Bilder und Diagramme aus dieser Veranstaltung werden wir dann in der nächsten Veranstaltung konkret in R reproduzieren.