week8b: Die Brownsche Bewegung und der Ornstein Uhlenbeck Prozess in diskreter Zeit

Bevor wir uns jetzt die Maximum-Likelihood Methode an einem etwas aufwändigeren Beispiel anschauen, es sollen dann die Parameter eines Ornstein Uhlenbeck Prozesses geschätzt werden, wollen wir uns zunächst ein bischen mit diesem Prozess vertraut machen. Dazu diskretisieren wir das Zeitintervall $[0, T]$ mit einem Δt gemäss

$$[0, T] \;\approx\; \big\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, n\Delta t\big\} \;=:\; \{t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n\}$$

mit $t_k = k\Delta t$ und einer End-Zeit $T = t_n = n\Delta t$ so dass wir also $n = T/\Delta t$ Zeitpunkte haben (oder $n + 1$ mit dem $t_0 = 0$). In jedem Zeitpunkt $t_k = k\Delta t$ ziehen wir eine neue, standard-normalverteilte Zufallszahl ϕ_k, die dann am Ende also gegen die Dichte der Standard-Normalverteilung

$$e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \, \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}}$$

integriert werden soll. Ein allgemeiner stochastischer Prozess (oder genauer eine allgemeine Ito-Diffusion in diskreter Zeit)

$$\{\, X_{t_k} \,\}_{k=0}^{n}$$

ist dann typischerweise gegeben durch eine Rekursion von der Form

$$X_{t_k} \;=\; X_{t_{k-1}} \;+\; a(X_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,\Delta t \;+\; b(X_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \tag{1}$$

wobei der Startwert $X_{t_0} = x_0$ eine fest vorgegebene Zahl ist. Als erstes wird man sich vielleicht fragen: Wieso taucht da der explizite Faktor $\sqrt{\Delta t}$ auf der rechten Seite von (1) auf? Dazu das erste

Beispiel (Brownsche Bewegung): Wir wählen

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

und bekommen so die Rekursion

$$X_{t_k} \;=\; X_{t_{k-1}} \;+\; \sqrt{\Delta t}\,\phi_k \tag{2}$$

Die können wir explizit lösen:

$$X_{t_k} \;=\; X_{t_0} \;+\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k} \phi_j \tag{3}$$

Eine standard Brownsche Bewegung hat den Startwert $X_{t_0} := 0$ und wir wollen sie im folgenden mit einem kleinem x_{t_k} bezeichnen, also

$$x_{t_k} \;:=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j \tag{4}$$

Wieso steht da ein $\sqrt{\Delta t}$? Wir müssen uns an das Theorem 2.2.1 aus dem week3a erinnern, das war die folgende Aussage:

Theorem 2.2.1: Es seien $\phi_1\,,\,\phi_2\,,\,\cdots\,,\,\phi_n$ normalverteilte Zufallsvariablen mit Mittelwerten $\mu_1\,,\,\mu_2\,,\,\cdots\,,\,\mu_n$ und Standardabweichungen $\sigma_1\,,\,\sigma_2\,,\,\cdots\,,\,\sigma_n$ Dann gilt: Die Summe

$$\phi \;:=\; \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n$$

ist normalverteilt mit Mittelwert

$$\mu \;=\; \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n \tag{5}$$

und Varianz

$$\sigma^2 \;=\; \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 \tag{6}$$

oder Standardabweichung

$$\sigma \;=\; \left\{\,\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2\,\right\}^{1/2}$$

Das heisst genauer, für eine beliebige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_1+\cdots+\phi_n)\,\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{(\phi_k-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}}\,\frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(\phi)\,e^{-\frac{(\phi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,. \tag{7}$$

mit μ und σ^2 gegeben durch (5) und (6).

Wenn wir die Brownsche Bewegung in (4) etwa folgendermassen schreiben,

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,s_k \tag{8}$$

$$s_k \;:=\; \sum_{j=1}^{k}\phi_j \tag{9}$$

dann ist das s_k also einfach eine Summe von k standard normalverteilten Zufallszahlen. Nach dem Theorem 2.2.1 gilt dann: Das s_k ist wieder normalverteilt mit Mittelwert

$$\mu_{s_k} \;=\; \mathsf{E}[s_k] \;=\; 0 \tag{10}$$

und Varianz

$$\sigma_{s_k}^2 \;=\; \mathsf{V}[s_k] \;=\; k \tag{11}$$

Die Brownsche Bewegung

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,s_k \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j \tag{12}$$

ist dann also eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert

$$\mathsf{E}[x_{t_k}] \;=\; 0 \tag{13}$$

und Varianz

$$\mathsf{V}[\,x_{t_k}\,] \;=\; \mathsf{V}[\,\sqrt{\Delta t}\;s_k\,] \;=\; (\sqrt{\Delta t})^2\,\mathsf{V}[s_k] \;=\; \Delta t\,k \;=\; t_k \tag{14}$$

Mit anderen Worten, die Varianz hat einen wohldefinierten, nichttrivialen Grenzwert im Kontinuumslimes $\Delta t \to 0$, $k \to \infty$ mit $t_k = k\Delta t =: t$ fest, nämlich $\mathsf{V}[x_t] = t$. Wenn wir anstatt $\sqrt{\Delta t}\;\sum_{j=1}^{k} \phi_j$ etwa eine Summe

$$\tilde{x}_{t_k} \;:=\; \Delta t \sum_{j=1}^{k} \phi_j \tag{15}$$

definiert hätten, würden wir auf

$$\mathsf{V}[\,\tilde{x}_{t_k}\,] \;=\; \mathsf{V}[\,\Delta t\,s_k\,] \;=\; (\Delta t)^2\,\mathsf{V}[s_k] \;=\; (\Delta t)^2\,k \;=\; \Delta t\;t_k \;\stackrel{\Delta t\to 0}{\to}\; 0 \tag{16}$$

kommen und wir hätten im wesentlichen im Limes $\Delta t \to 0$, $k \to \infty$ mit $t_k = k\Delta t =: t$ fest

$$\lim_{\Delta t \to 0} \tilde{x}_t \;=\; 0 \tag{17}$$

Schauen wir und die Sachen in R an:

`R-Simulation Brownsche Bewegung`

Definieren wir noch ein Δx_t für die Brownsche Bewegung (4) durch

$$\Delta x_{t_k} \;:=\; x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \;\stackrel{(4)}{=}\; \sqrt{\Delta t}\,\phi_k \tag{18}$$

dann können wir die Rekursion in (1) auch folgendermassen schreiben:

$$X_{t_k} \;=\; X_{t_{k-1}} \;+\; a(X_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,\Delta t \;+\; b(X_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,\Delta x_{t_k} \tag{19}$$

oder

$$\Delta X_{t_k} \;:=\; X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \;=\; a(X_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,\Delta t \;+\; b(X_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,\Delta x_{t_k} \tag{20}$$

Eine Rekursion in der Form (20) wird dann auch als stochastische Differentialgleichung bezeichnet, im Kontinuumslimes benutzt man die Notation

$$dX_t \;=\; a(X_t, t)\,dt \;+\; b(X_t, t)\,dx_t \tag{21}$$

wobei die genaue Definition von (21) durch (20) gegeben ist. Bevor wir jetzt den Ornstein-Uhlenbeck Prozess hinschreiben, machen wir eben noch ein zweites

Beispiel (deterministische DGL): Wir wählen

$$b \;=\; 0 \tag{22}$$

und

$$a(X,t) \;=\; a(X) \;=\; \kappa(\mu - X) \tag{23}$$

mit Konstanten κ und μ. Dann bekommen wir die Rekursion

$$\Delta X_{t_k} \;=\; \kappa(\mu - X_{t_{k-1}})\,\Delta t \tag{24}$$

oder

$$\frac{\Delta X_{t_k}}{\Delta t} \;=\; \kappa(\mu - X_{t_{k-1}}) \tag{25}$$

Im Kontinuumslimes $\Delta t \to 0$ wird das zu

$$X'(t) \;=\; \frac{dX}{dt} \;=\; \kappa(\mu - X) \tag{26}$$

Das ist dann einfach eine gewöhnliche DGL, die wir mit Trennung der Variablen lösen können:

$$\frac{dX}{\mu - X} \;=\; \kappa\, dt$$

oder

$$\int_{X_0}^{X_t} \frac{dX}{\mu - X} \;=\; -\,\log[\mu - X]\,\Big|_{X_0}^{X_t} \;=\; -\,\log\frac{\mu - X_t}{\mu - X_0} \;=\; \kappa\, t$$

oder

$$\mu - X_t \;=\; (\mu - X_0)\, e^{-\kappa t}$$

und damit

$$X_t \;=\; \mu \;+\; (X_0 - \mu)\, e^{-\kappa t} \tag{27}$$

Die Rekursion (24) ist noch hinreichend einfach, so dass man sogar für festes Δt, also nicht nur im Limes $\Delta t \to 0$, eine explizite Lösung erhält. Es gilt das folgende

Lemma 5.3.1: a) Gegeben sei die Zahl α und die Zahlenfolge $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dann gilt: Die Rekursion

$$x_k \;=\; \alpha\, x_{k-1} \;+\; c_k\;\;, \qquad k = 1, 2, ...$$

mit Startwert x_0 wird gelöst von

$$x_k \;=\; \alpha^k x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k} c_j\, \alpha^{k-j}\;\;.$$

b) Die Rekursion

$$\Delta X_{t_k} \;=\; X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \;=\; \kappa(\mu - X_{t_{k-1}})\,\Delta t \tag{28}$$

wird gelöst von

$$X_{t_k} \;=\; \mu \;+\; (X_0 - \mu)\,(1-\kappa\Delta t)^k \;=\; \mu \;+\; (X_0-\mu)\left(1-\tfrac{\kappa t_k}{k}\right)^k \tag{29}$$

Beweis: Ü-Blatt 7. ■

Jetzt können wir den zeitdiskreten Ornstein-Uhlenbeck Prozess definieren:

Definition: Ein zeitdiskreter Ornstein-Uhlenbeck Prozess $\{X_{t_k}\}_{k=1}^n$ ist gegeben durch die stochastische Rekursion

$$X_{t_k} \;=\; X_{t_{k-1}} \;+\; \kappa(\mu - X_{t_{k-1}})\,\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\;\phi_k \tag{30}$$

wobei die $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen sind.

Wir können wieder den Teil (a) vom Lemma 5.3.1 anwenden und bekommen die folgende explizite Darstellung in diskreter Zeit (Ü-Blatt 7):

$$X_{t_k} \;=\; \mu \;+\; (X_0-\mu)\,(1-\kappa\Delta t)^k \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j\,(1-\kappa\Delta t)^{k-j} \tag{31}$$

Lemma 5.3.2: Es sei $\{X_{t_k}\}$ ein zeitdiskreter Ornstein-Uhlenbeck Prozess gegeben durch (30) oder (31). Dann gilt:

$$\mathsf{E}[\,X_{t_k}\,] \;=\; \mu \;+\; (X_0-\mu)\,(1-\kappa\Delta t)^k \tag{32}$$

$$\mathsf{V}[\,X_{t_k}\,] \;=\; \frac{\sigma^2}{\kappa}\,\frac{1-(1-\kappa\Delta t)^{2k}}{2-\kappa\Delta t} \tag{33}$$

Insbesondere im Kontinuumslimes $\Delta t \to 0$, $k \to \infty$ mit $t_k = k\Delta t =: t$ fest:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathsf{E}[\,X_t\,] \;=\; \mu \;+\; (X_0-\mu)\,e^{-\kappa t} \tag{34}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathsf{V}[\,X_t\,] \;=\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t}) \tag{35}$$

Beweis: Ü-Blatt 7. ■

Schauen wir uns die Sachen in R an:

`R-Simulation Ornstein-Uhlenbeck Prozess`