week5b: Kapitel 3.1: Von der Normalverteilung abgeleitete Verteilungen: Die t-, F- und die Chi-Quadrat Verteilung, Teil2

In diesem week5b wird noch der Teil (c) des Theorems 3.1.3 vom letzten Mal beweisen, die Beweise für die Teile (a) und (b) stehen in dem week5a.

Theorem 3.1.3: Es seien

$$\phi_0 \ , \ \phi_1 \ , \ \phi_2 \ , \ \cdots \ , \ \phi_n$$

unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen. Dann gilt

a)

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_n^2 \ \in \ \chi_n^2 \ , \quad \text{ist } \chi_n^2 \text{ verteilt}$$

b)

$$\frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2}{n}}} \ \in \ t_n \ , \quad \text{ist } t_n \text{ verteilt}$$

c)

$$\frac{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_k^2}{k}}{\frac{\phi_{k+1}^2+\cdots+\phi_{k+\ell}^2}{\ell}} \ \in \ F_{k,\ell} \ , \quad \text{ist } F_{k,\ell} \text{ verteilt}$$

Das heisst genauer: Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

a)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_1^2 + \cdots + \phi_n^2) \ \prod_{j=1}^n e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \ = \ \int_0^\infty f(y) \, p_{\chi_n^2}(y) \, dy$$

b)

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\left(\frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2}{n}}} \right) \ \prod_{j=0}^n e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \ = \ \int_{-\infty}^\infty f(y) \, p_{t_n}(y) \, dy$$

c)

$$\int_{\mathbb{R}^{k+\ell}} f\left(\frac{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_k^2}{k}}{\frac{\phi_{k+1}^2+\cdots+\phi_{k+\ell}^2}{\ell}} \right) \prod_{j=1}^{k+\ell} e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad \int_0^\infty f(y)\, p_{F_{k,\ell}}(y)\, dy$$

mit den Dichten

a)

$$p_{\chi_n^2}(y) \quad = \quad c_n \;\times\; y^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{y}{2}}$$

mit der Konstanten

$$c_n \quad = \quad \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$

b)

$$p_{t_n}(y) \quad = \quad c_n \;\times\; \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

mit der Konstanten

$$c_n \quad = \quad \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$

c)

$$p_{F_{k,\ell}}(y) \quad = \quad c_{k,\ell} \;\times\; \frac{y^{\frac{k}{2}-1}}{\left(1+\frac{k}{\ell}\,y\right)^{\frac{k+\ell}{2}}}$$

mit der Konstanten

$$c_{k,\ell} \quad = \quad \left(\tfrac{k}{\ell}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma(\frac{k+\ell}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{\ell}{2})}$$

Dabei sind k, ℓ und n natürliche Zahlen grösser oder gleich 1.

Beweis: Teil (c): Wir benötigen wieder die Formel für die Integration von rotationssymmetrischen Funktionen im $\mathbb{R}^n$, das war die folgende Sache:

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heisst, wir können das f schreiben als

$$f(x) \quad = \quad \tilde{f}(r) \quad = \quad \tilde{f}(\,\|x\|\,)$$

mit einem $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d^n x \quad = \quad \omega_n \int_0^\infty \tilde{f}(r)\, r^{n-1}\, dr \tag{1}$$

wobei

$$\omega_n \;:=\; \int_{S_{n-1}} d\Omega(x')$$

die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

Wir brauchen jetzt die folgende leichte Verallgemeinerung von (1): Wir haben eine Funktion

$$f \;:\; \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$$

mit

$$f \;=\; f(x) \;=\; f(x_1, x_2)\,, \quad x_1 \in \mathbb{R}^n \quad x_2 \in \mathbb{R}^m$$

und wir nehmen an, dass das f rotationssymmetrisch ist bezüglich des $x_1 \in \mathbb{R}^n$ und bezüglich des $x_2 \in \mathbb{R}^m$. Das heiss genauer, wir nehmen an, dass sich das f schreiben lässt als

$$f(x) \;=\; f(x_1, x_2) \;=\; \tilde{f}(r_1, r_2) \;=\; \tilde{f}\big(\, \|x_1\|\,,\, \|x_2\|\,\big)$$

mit einem $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zweimaliges Anwenden von Gleichung (1) liefert dann die folgende Formel:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x)\, d^{n+m}x \;&=\; \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x_1, x_2)\, d^n x_1\, d^m x_2 \\ &=\; \omega_n\, \omega_m \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{f}(r_1, r_2)\; r_1^{n-1}\; r_2^{m-1}\; dr_1\, dr_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Damit können wir jetzt den Teil (c) beweisen: Wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}(f) \;&:=\; \int_{\mathbb{R}^{k+\ell}} f\left(\frac{\frac{\phi_1^2 + \cdots + \phi_k^2}{k}}{\frac{\phi_{k+1}^2 + \cdots + \phi_{k+\ell}^2}{\ell}} \right) \prod_{j=1}^{k+\ell} e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \\ &=\; \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k+\ell}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{k+\ell}} f\left(\frac{\frac{\phi_1^2 + \cdots + \phi_k^2}{k}}{\frac{\phi_{k+1}^2 + \cdots + \phi_{k+\ell}^2}{\ell}} \right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^k \phi_j^2}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{k+\ell} \phi_j^2}\; d^k\phi\, d^\ell\phi \\ &\overset{(2)}{=}\; \frac{\omega_k\, \omega_\ell}{(2\pi)^{\frac{k+\ell}{2}}} \int_0^\infty \int_0^\infty f\left(\frac{\frac{r_1^2}{k}}{\frac{r_2^2}{\ell}} \right) e^{-\frac{1}{2} r_1^2}\; e^{-\frac{1}{2} r_2^2}\; r_1^{k-1}\; r_2^{\ell-1}\; dr_1\, dr_2 \\ &=\; \alpha_{k,\ell} \int_0^\infty \int_0^\infty f\Big(\tfrac{\ell}{k} \tfrac{r_1^2}{r_2^2} \Big)\; e^{-\frac{1}{2} r_1^2}\; e^{-\frac{1}{2} r_2^2}\; r_1^{k-1}\; r_2^{\ell-1}\; dr_1\, dr_2 \end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$\alpha_{k,\ell} \;:=\; \frac{\omega_k\, \omega_\ell}{(2\pi)^{\frac{k+\ell}{2}}}$$

Wir substituieren das r_1 durch ein $y \in [0, \infty)$ mit

$$\begin{aligned} r_1 \;&=\; r_2\, y \\ dr_1 \;&=\; r_2\, dy \end{aligned}$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Int}(f) &= \alpha_{k,\ell} \int_0^\infty \int_0^\infty f\Big(\tfrac{\ell}{k} \tfrac{r_1^2}{r_2^2} \Big)\; e^{-\frac{1}{2} r_1^2}\, e^{-\frac{1}{2} r_2^2}\; r_1^{k-1}\; r_2^{\ell-1}\; dr_1\, dr_2 \\
&= \alpha_{k,\ell} \int_0^\infty \int_0^\infty f\big(\tfrac{\ell}{k}\, y^2 \big)\; e^{-\frac{1}{2} r_2^2 y^2}\; e^{-\frac{1}{2} r_2^2}\; r_2^{k-1}\; y^{k-1}\; r_2^{\ell-1}\; r_2\; dy\; dr_2 \\
&= \alpha_{k,\ell} \int_0^\infty \int_0^\infty f\big(\tfrac{\ell}{k}\, y^2 \big)\; e^{-\frac{1}{2} r_2^2 (1+y^2)}\; r_2^{k+\ell-1}\; y^{k-1}\; dy\; dr_2 \\
&= \alpha_{k,\ell} \int_0^\infty f\big(\tfrac{\ell}{k}\, y^2 \big) \left\{ \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} r_2^2 (1+y^2)}\; r_2^{k+\ell-1}\; dr_2 \right\} y^{k-1}\; dy
\end{aligned}$$

Das Integral in den geschweiften Klammern berechnen wir für festes y mit der Substitution

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= r_2^2\,(1+y^2) \\
d\rho &= \sqrt{1+y^2}\, dr_2
\end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} r_2^2 (1+y^2)}\; r_2^{k+\ell-1}\; dr_2 &= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\; \rho^{k+\ell-1}\; (1+y^2)^{-\frac{k+\ell-1}{2}}\; \frac{d\rho}{\sqrt{1+y^2}} \\
&= (1+y^2)^{-\frac{k+\ell}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\; \rho^{k+\ell-1}\; d\rho \\
&= (1+y^2)^{-\frac{k+\ell}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\; \rho^{k+\ell-2}\; \rho\, d\rho \\
&\overset{v=\rho^2/2 \,\Leftrightarrow\, \rho=\sqrt{2v}}{=} (1+y^2)^{-\frac{k+\ell}{2}} \int_0^\infty e^{-v}\; (2v)^{\frac{k+\ell-2}{2}}\; dv \\
&= 2^{\frac{k+\ell-2}{2}}\; (1+y^2)^{-\frac{k+\ell}{2}} \int_0^\infty e^{-v}\; v^{\frac{k+\ell}{2}-1}\; dv \\
&= \Gamma\big(\tfrac{k+\ell}{2} \big)\; 2^{\frac{k+\ell-2}{2}}\; (1+y^2)^{-\frac{k+\ell}{2}}
\end{aligned}$$

Das können wir in die Formel oben für das $\mathrm{Int}(f)$ einsetzen und bekommen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Int}(f) &= \alpha_{k,\ell} \int_0^\infty f\big(\tfrac{\ell}{k}\, y^2 \big) \left\{ \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} r_2^2 (1+y^2)}\; r_2^{k+\ell-1}\; dr_2 \right\} y^{k-1}\; dy \\
&= \Gamma\big(\tfrac{k+\ell}{2} \big)\; 2^{\frac{k+\ell-2}{2}}\; \alpha_{k,\ell} \int_0^\infty f\big(\tfrac{\ell}{k}\, y^2 \big)\; (1+y^2)^{-\frac{k+\ell}{2}}\; y^{k-1}\; dy \\
&= \Gamma\big(\tfrac{k+\ell}{2} \big)\; 2^{\frac{k+\ell-2}{2}}\; \alpha_{k,\ell} \int_0^\infty f\big(\tfrac{\ell}{k}\, y^2 \big)\; (1+y^2)^{-\frac{k+\ell}{2}}\; y^{k-2}\; y\, dy
\end{aligned}$$

Schliesslich substituieren wir noch

$$\begin{aligned}
x &= \tfrac{\ell}{k}\, y^2 \\
dx &= \tfrac{\ell}{k}\, 2y\, dy
\end{aligned}$$

und erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Int}(f) &= \Gamma\Big(\tfrac{k+\ell}{2}\Big)\, 2^{\frac{k+\ell-2}{2}}\, \alpha_{k,\ell} \int_0^\infty f\Big(\tfrac{\ell}{k}\,y^2\Big)\;\; (1+y^2)^{-\frac{k+\ell}{2}}\; y^{k-2}\; y\,dy \\
&= \Gamma\Big(\tfrac{k+\ell}{2}\Big)\, 2^{\frac{k+\ell-2}{2}}\, \alpha_{k,\ell} \int_0^\infty f(x)\, \Big(1 + \tfrac{k}{\ell}\,x\Big)^{-\frac{k+\ell}{2}}\; \Big(\tfrac{k}{\ell}\,x\Big)^{\frac{k-2}{2}}\; \tfrac{1}{2}\,\tfrac{k}{\ell}\,dx \\
&= c_{k,\ell} \int_0^\infty f(x)\, \frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{\Big(1 + \frac{k}{\ell}\,x\Big)^{\frac{k+\ell}{2}}}\; dx
\end{aligned}
$$

mit der Konstanten

$$
\begin{aligned}
c_{k,\ell} &= \Gamma\Big(\tfrac{k+\ell}{2}\Big)\, 2^{\frac{k+\ell-2}{2}}\, \alpha_{k,\ell}\, \Big(\tfrac{k}{\ell}\Big)^{\frac{k-2}{2}}\; \tfrac{1}{2}\,\tfrac{k}{\ell} \\
&= \Gamma\Big(\tfrac{k+\ell}{2}\Big)\, 2^{\frac{k+\ell}{2}-2}\, \alpha_{k,\ell}\, \Big(\tfrac{k}{\ell}\Big)^{\frac{k}{2}}
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\alpha_{k,\ell} = \frac{\omega_k\,\omega_\ell}{(2\pi)^{\frac{k+\ell}{2}}}
$$

und, mit Lemma 3.1.2 vom letzten Mal,

$$
\omega_n = \frac{n\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{n\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = 2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}
$$

ist

$$
\alpha_{k,\ell} = \frac{4}{2^{\frac{k+\ell}{2}}}\,\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{\ell}{2})} = \frac{1}{2^{\frac{k+\ell}{2}-2}}\,\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{\ell}{2})}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
c_{k,\ell} &= \Gamma\Big(\tfrac{k+\ell}{2}\Big)\, 2^{\frac{k+\ell}{2}-2}\, \alpha_{k,\ell}\, \Big(\tfrac{k}{\ell}\Big)^{\frac{k}{2}} \\
&= \frac{\Gamma\Big(\frac{k+\ell}{2}\Big)}{\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{\ell}{2})}\, \Big(\tfrac{k}{\ell}\Big)^{\frac{k}{2}}
\end{aligned}
$$

Damit ist das Theorem 3.1.3 vollständig bewiesen. $\blacksquare$