week5a: Kapitel 3.1: Von der Normalverteilung abgeleitete Verteilungen: Die t-, F- und die Chi-Quadrat Verteilung, Teil1

3.1.1 Erinnerung Analysis II: Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und

$$x \;=\; (x_1, x_2, \cdots, x_n) \;=\; \|x\| \, \tfrac{x}{\|x\|} \;=:\; r\, x'$$

mit

$$x' \;\in\; S_{n-1} \;:=\; \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x\| = 1 \,\right\}$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d^n x \;=\; \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} f(r\, x')\; d\Omega(x')\, r^{n-1} dr \tag{1}$$

wobei $d\Omega(x')$ das Oberfächenmass auf der $n-1$ dimensionalen Einheitssphäre ist. Die konkrete Form von $d\Omega(x')$ hängt davon ab, wie man S_{n-1} mit $n-1$ Parametern parametrisieren tut, das ist für uns im folgenden aber nicht relevant, da wir nur die folgende Gleichung (2) benötigen, den Spezialfall von (1) für rotationssymmetrische Funktionen:

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heisst, wir können das f schreiben als

$$f(x) \;=\; \tilde f(r) \;=\; \tilde f(\, \|x\| \,)$$

mit einem $\tilde f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann folgt aus Gleichung (1) die folgende Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d^n x \;=\; \omega_n \int_0^\infty \tilde f(r)\, r^{n-1}\, dr \tag{2}$$

wobei

$$\omega_n \;:=\; \int_{S_{n-1}} d\Omega(x')$$

die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist. Als warm-up Übung für die folgenden Rechnungen wollen wir zunächst in dem folgendem Lemma mit Hilfe von Gleichung (2) das Volumen τ_n und die Oberfläche ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel berechnen:

Lemma 3.1.2: Es sei

$$K_n \;:=\; \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x\| \le 1 \,\right\}$$

die n-dimensionale Einheitskugel und τ_n sei das Volumen von K_n,

$$\tau_n \;:=\; \int_{K_n} d^n x$$

Dann gilt:

$$\omega_n \;=\; n\,\tau_n \tag{3}$$

und

$$\tau_n \;=\; \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)} \;=\; \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\big(\frac{n}{2}\big)!} \tag{4}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen nur für gerade n gilt.

Beweis: Mit Hilfe von Gleichung (2) können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
\tau_n &= \textstyle\int_{K_n} d^n x \\
&= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \chi(\,\|x\| \le 1\,)\, d^n x \\
&\overset{(2)}{=} \omega_n \textstyle\int_0^1 \chi(\,r \le 1\,)\, r^{n-1}\, dr \\
&= \omega_n\, \tfrac{r^n}{n}\,\Big|_0^1 \\
&= \tfrac{\omega_n}{n}
\end{aligned}$$

also $n\,\tau_n = \omega_n$. Das ω_n können wir jetzt folgendermassen berechnen, wieder mit Hilfe von Gleichung (2): Zunächst mal gilt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\phi^2}{2}}\, \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 1 \;\;,$$

die Fläche unter der Gauss'schen Glockenkurve ist 1. Wir können jetzt schreiben

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\phi_1^2}{2}}\, \frac{d\phi_1}{\sqrt{2\pi}} \;\times\; \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\phi_2^2}{2}}\, \frac{d\phi_2}{\sqrt{2\pi}} \;\times\; \cdots \;\times\; \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\phi_n^2}{2}}\, \frac{d\phi_n}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2}{2}}\, \frac{d^n\phi}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}
\end{aligned}$$

Wir können Formel (2) anwenden und bekommen

$$\begin{aligned}
1 &= \tfrac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}\, r^{n-1}\, dr \\
&= \tfrac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-y}\, (\sqrt{2y})^{n-2}\, dy \\
&= \tfrac{\omega_n\, 2^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\, \pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-y}\, y^{\frac{n}{2}-1}\, dy \\
&= \tfrac{\omega_n}{2\,\pi^{\frac{n}{2}}}\, \Gamma\big(\tfrac{n}{2}\big)
\end{aligned}$$

Das können wir nach ω_n auflösen und erhalten

$$\omega_n \quad = \quad 2 \, \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad = \quad n \, \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad = \quad n \, \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Wir kommen jetzt zum Hauptresultat dieses Kapitels, das ist der nächste Satz.

Theorem 3.1.3: Es seien

$$\phi_0 \ , \ \phi_1 \ , \ \phi_2 \ , \ \cdots \ , \ \phi_n$$

unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen. Dann gilt

a)

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_n^2 \quad \in \quad \chi_n^2 \ , \qquad \text{ist } \chi_n^2 \text{ verteilt}$$

b)

$$\frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2}{n}}} \quad \in \quad t_n \ , \qquad \text{ist } t_n \text{ verteilt}$$

c)

$$\frac{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_k^2}{k}}{\frac{\phi_{k+1}^2+\cdots+\phi_{k+\ell}^2}{\ell}} \quad \in \quad F_{k,\ell} \ , \qquad \text{ist } F_{k,\ell} \text{ verteilt}$$

Das heisst genauer: Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

a)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_1^2 + \cdots + \phi_n^2) \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad \int_0^\infty f(y)\, p_{\chi_n^2}(y)\, dy$$

b)

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\left(\frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2}{n}}} \right) \prod_{j=0}^{n} e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad \int_{-\infty}^\infty f(y)\, p_{t_n}(y)\, dy$$

c)

$$\int_{\mathbb{R}^{k+\ell}} f\left(\frac{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_k^2}{k}}{\frac{\phi_{k+1}^2+\cdots+\phi_{k+\ell}^2}{\ell}} \right) \prod_{j=1}^{k+\ell} e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad \int_0^\infty f(y)\, p_{F_{k,\ell}}(y)\, dy$$

mit den Dichten

a)

$$p_{\chi^2_n}(y) \;=\; c_n \;\times\; y^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{y}{2}}$$

mit der Konstanten

$$c_n \;=\; \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$

b)

$$p_{t_n}(y) \;=\; c_n \;\times\; \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

mit der Konstanten

$$c_n \;=\; \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$

c)

$$p_{F_{k,\ell}}(y) \;=\; c_{k,\ell} \;\times\; \frac{y^{\frac{k}{2}-1}}{\left(1\,+\,\frac{k}{\ell}\,y\right)^{\frac{k+\ell}{2}}}$$

mit der Konstanten

$$c_{k,\ell} \;=\; \left(\tfrac{k}{\ell}\right)^{\frac{k}{2}}\;\frac{\Gamma(\frac{k+\ell}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{\ell}{2})}$$

Dabei sind k, ℓ und n natürliche Zahlen grösser oder gleich 1.

Beweis: Wir beweisen die Teile (a) und (b) und in der nächsten Veranstaltung dann noch den Teil (c):

a) Mit Formel (2) bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2)\,\prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{\phi_j^2}{2}}\,\frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \;&=\; \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty f(r^2)\,e^{-\frac{r^2}{2}}\,r^{n-1}\,dr \\
&=\; \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty f(y)\,e^{-\frac{y}{2}}\,y^{\frac{n}{2}-1}\,\frac{dy}{2}
\end{aligned}$$

also ist

$$p_{\chi^2_n}(y) \;=\; c_n \;\times\; y^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{y}{2}}$$

mit

$$c_n \;=\; \frac{\omega_n}{2\,(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \;=\; \frac{2\,\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(\frac{n}{2})}{2\,(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \;=\; \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\quad .$$

b) Wir wenden wieder die Formel (2) an:

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\Bigg(\frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2}{n}}}\Bigg)\, e^{-\frac{\phi_0^2}{2}}\,\frac{d\phi_0}{\sqrt{2\pi}}\,\prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{\phi_j^2}{2}}\,\frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \quad =$$

$$\frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty f\Big(\frac{\phi_0}{\frac{r}{\sqrt{n}}}\Big)\, e^{-\frac{\phi_0^2}{2}}\,\frac{d\phi_0}{\sqrt{2\pi}}\quad e^{-\frac{r^2}{2}}\, r^{n-1}\, dr$$

$$= \quad \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} f\big(\sqrt{n}\,\tfrac{\phi_0}{r}\big)\, e^{-\frac{\phi_0^2}{2}}\,\frac{d\phi_0}{\sqrt{2\pi}}\quad e^{-\frac{r^2}{2}}\, r^{n-1}\, dr$$

Wir eliminieren ϕ_0 durch die Substitution

$$\phi_0 \quad = r\, y$$

und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\Bigg(\frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2}{n}}}\Bigg)\, e^{-\frac{\phi_0^2}{2}}\,\frac{d\phi_0}{\sqrt{2\pi}}\,\prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{\phi_j^2}{2}}\,\frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \quad =$$

$$\frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} f\big(\sqrt{n}\,y\big)\, e^{-\frac{r^2y^2}{2}}\, r\, dy\quad e^{-\frac{r^2}{2}}\, r^{n-1}\, dr$$

$$= \quad \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}} f\big(\sqrt{n}\,y\big)\int_0^\infty e^{-\frac{r^2(y^2+1)}{2}}\, r^n\, dr\; dy$$

$$= \quad \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}} f\big(\sqrt{n}\,y\big)\,\frac{1}{(1+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dy\int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\,\rho^n\, d\rho$$

$$= \quad \frac{\omega_n}{\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,\frac{1}{\big(1+\frac{y^2}{n}\big)^{\frac{n+1}{2}}}\, dy\int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\,\rho^n\, d\rho$$

$$= \quad c_n\int_{\mathbb{R}} f(y)\,\frac{1}{\big(1+\frac{y^2}{n}\big)^{\frac{n+1}{2}}}\, dy$$

mit der Konstanten

$$\begin{aligned}
c_n \quad &= \quad \frac{\omega_n}{\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\,\rho^n\, d\rho\\
&= \quad \frac{\omega_n}{\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty e^{-v}\,(\sqrt{2v})^{n-1}\, dv\\
&= \quad \frac{\omega_n\, 2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty e^{-v}\, v^{\frac{n-1}{2}}\, dv\\
&= \quad \frac{\omega_n}{2\sqrt{n}\,\pi^{\frac{n+1}{2}}}\,\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\\
&= \quad \frac{n\,\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)}{2\sqrt{n}\,\pi^{\frac{n+1}{2}}}\,\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\\
&= \quad \frac{n\,\pi^{\frac{n}{2}}}{2\sqrt{n}\,\pi^{\frac{n+1}{2}}}\,\frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\frac{n}{2}\,\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}\\
&= \quad \frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}
\end{aligned}$$

Damit sind die Teile (a) und (b) bewiesen, Teil (c) machen wir noch in der nächsten Veranstaltung. ■