week4a: Kapitel 2.2: Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

Letzte Woche hatten wir den zentralen Grenzwertsatz formuliert, das Setup war das folgende:

Wir betrachten eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen

$$X_1\,,\,X_2\,,\,\cdots\,,\,X_n$$

mit Mittelwert μ und Varianz σ^2,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[X_i] &= \mu \quad \forall i \\ \mathsf{V}[X_i] &= \sigma^2 \quad \forall i\end{aligned}$$

Die X_i können diskrete Zufallszahlen sein, etwa mit Werten in den natürlichen Zahlen, oder auch kontinuierliche Zufallszahlen, mit Werten in $\mathbb{R}$. Wir definieren die Summe

$$S_n \;:=\; \textstyle\sum_{k=1}^n X_k$$

In der Bemerkung 2.2.3 vom letzten Mal hatten wir den Erwartungswert und die Varianz von S_n berechnet,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[S_n] &= n\,\mu \\ \mathsf{V}[S_n] &= n\,\sigma^2\end{aligned}$$

Dann definieren wir die normierte oder standardisierte Zufallsvariable

$$Z_n \;:=\; \frac{S_n - \mathsf{E}[S_n]}{\sqrt{\mathsf{V}[S_n]}} \;=\; \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

Dieses Z_n können wir dann auch folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}Z_n &= \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} &(1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{X_1 + \cdots + X_n \,-\, n\mu}{\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{X_1-\mu}{\sigma} + \cdots + \frac{X_n-\mu}{\sigma}\right\} \\ &= \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} &(2)\end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$Y_i \;:=\; \frac{X_i-\mu}{\sigma} \;=\; \frac{X_i - \mathsf{E}[X_i]}{\sqrt{\mathsf{V}[X_i]}} \tag{3}$$

Die Y_i sind dann unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[Y_i] &= 0 \quad \forall i \\ \mathsf{V}[Y_i] &= 1 \quad \forall i \end{aligned}$$

Wären die Y_i jetzt normalverteilt, dann wäre nach dem Theorem 2.2.1 aus dem week3a das Z_n für jedes feste n ebenfalls eine standard-normalverteilte Zufallsvariable. Für beliebige Verteilungen ist das natürlich nicht mehr der Fall. Wenn man aber den Limes für grosse n betrachtet, bekommt man näherungsweise standard-normalverteilte Zufallsgrössen, das ist jetzt die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes:

Theorem 2.2.4 (Zentraler Grenzwertsatz): Es seien $X_1, \cdots, X_n$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ und die normierten oder standardisierten Zufallsgrössen Z_n seien gegeben durch die Gleichungen (1) oder (2,3) von oben. Dann gilt: Im Limes $n \to \infty$ sind die Z_n standard-normalverteilt. Das heisst genauer, für ein beliebiges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\big[\, f(Z_n) \,\big] \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(z)\, e^{-\frac{z^2}{2}} \, \tfrac{dz}{\sqrt{2\pi}} \tag{4}$$

Beweis: Es seien

$$\phi_1 \,,\, \phi_2 \,,\, \cdots \,,\, \phi_n$$

standard-**normalverteilte** Zufallsvariablen und

$$\Phi_n \;:=\; \frac{\phi_1 + \cdots + \phi_n}{\sqrt{n}}$$

Nach Theorem 2.2.1 aus dem week3a ist jedes Φ_n standard-normalverteilt, also

$$\mathsf{E}\big[\, f(\Phi_n) \,\big] \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(\phi)\, e^{-\frac{\phi^2}{2}} \, \tfrac{d\phi}{\sqrt{2\pi}} \tag{5}$$

Beachten Sie, dass die rechte Seite von (5) unabhängig ist von n, das ist also schon der Limes sozusagen. Wir schreiben jetzt

$$\begin{aligned} f(Z_n) \;&=\; f\Big(\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \Big) \\ &=\; \quad f\Big(\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \Big) \;-\; f\Big(\frac{\phi_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \Big) \\ &\quad\; + f\Big(\frac{\phi_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \Big) \;-\; f\Big(\frac{\phi_1 + \phi_2 + Y_3 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \Big) \\ &\quad\; + f\Big(\frac{\phi_1 + \phi_2 + Y_3 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \Big) \;-\; f\Big(\frac{\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + Y_4 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \Big) \\ &\quad\; \vdots \\ &\quad\; + f\Big(\frac{\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_{n-1} + Y_n}{\sqrt{n}} \Big) \;-\; f\Big(\frac{\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_{n-1} + \phi_n}{\sqrt{n}} \Big) \\ &\quad\; + f\Big(\frac{\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_{n-1} + \phi_n}{\sqrt{n}} \Big) \end{aligned}$$

oder etwas kompakter mit einem Summenzeichen

$$f(Z_n) \;=\; f\big(\Phi_n\big) \;+$$

$$\sum_{k=1}^{n}\Bigg[\; f\Big(\frac{\phi_1+\cdots+\phi_{k-1}+Y_k+Y_{k+1}+\cdots+Y_n}{\sqrt{n}}\Big) \;-\; f\Big(\frac{\phi_1+\cdots+\phi_{k-1}+\phi_k+Y_{k+1}+\cdots+Y_n}{\sqrt{n}}\Big)\;\Bigg]$$

Wegen Gleichung (5) haben wir den Satz bewiesen, wenn wir zeigen können, dass im Limes $n\to\infty$ die Beiträge von der Summe vernachlässigt werden können. Dazu kürzen wir ab

$$\begin{aligned}
\xi_{n,k} \;&:=\; \frac{\phi_1+\cdots+\phi_{k-1}+0+Y_{k+1}+\cdots+Y_n}{\sqrt{n}} \\
\delta_k \;&\in\; \left\{\, \frac{Y_k}{\sqrt{n}}\,,\, \frac{\phi_k}{\sqrt{n}} \,\right\}
\end{aligned}$$

Dann sind beide f's in den eckigen Klammern von der Form

$$f(\xi_{n,k}+\delta_k)$$

Da die δ's klein werden für grosse n, machen wir eine Taylor-Entwicklung, genauer, eine Taylor-Entwicklung 2. Ordnung mit Restterm:

$$f(\xi_{n,k}+\delta_k) \;=\; f(\xi_{n,k}) \;+\; f'(\xi_{n,k})\,\delta_k \;+\; \frac{1}{2}\,f''(\xi_{n,k})\,\delta_k^2 \;+\; \frac{1}{6}\,f'''(\xi_{n,k}+\tilde{\delta}_k)\,\delta_k^3$$

mit einem $\tilde{\delta}_k\in[0,\delta_k]$ oder $\tilde{\delta}_k\in[\delta_k,0]$, je nach Vorzeichen von δ_k. Für die Differenz der zwei f's in den eckigen Klammern von oben erhalten wir dann also

$$\begin{aligned}
f\big(\,\xi_{n,k}+\tfrac{Y_k}{\sqrt{n}}\,\big) \;-\; f\big(\,\xi_{n,k}+\tfrac{\phi_k}{\sqrt{n}}\,\big) \quad &= \; f'(\xi_{n,k})\,\big(\,\tfrac{Y_k}{\sqrt{n}}-\tfrac{\phi_k}{\sqrt{n}}\,\big) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,f''(\xi_{n,k})\,\big(\,\tfrac{Y_k^2}{n}-\tfrac{\phi_k^2}{n}\,\big) \\
&\quad + \tfrac{1}{6}\,f'''(\tilde{\xi}_{n,k})\,\tfrac{Y_k^3}{n^{3/2}} \;-\; \tfrac{1}{6}\,f'''(\tilde{\tilde{\xi}}_{n,k})\,\tfrac{\phi_k^3}{n^{3/2}}
\end{aligned} \tag{6}$$

Die genauen Werte von den $\tilde{\xi}_{n,k}$ und $\tilde{\tilde{\xi}}_{n,k}$ brauchen uns dabei nicht zu interessieren, da wir das f''' weiter unten gegen ein $\max\{\,|f'''|\,\}$ abschätzen. Wir nehmen jetzt den Erwartungswert,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\Big[\,f\big(\,\xi_{n,k}+\tfrac{Y_k}{\sqrt{n}}\,\big) \;-\; f\big(\,\xi_{n,k}+\tfrac{\phi_k}{\sqrt{n}}\,\big)\,\Big] \quad &= \; \mathsf{E}\Big[\,f'(\xi_{n,k})\,\big(\,\tfrac{Y_k}{\sqrt{n}}-\tfrac{\phi_k}{\sqrt{n}}\,\big)\,\Big] \\
&\quad + \mathsf{E}\Big[\,\tfrac{1}{2}\,f''(\xi_{n,k})\,\big(\,\tfrac{Y_k^2}{n}-\tfrac{\phi_k^2}{n}\,\big)\,\Big] \\
&\quad + \mathsf{E}\Big[\,\tfrac{1}{6}\,f'''(\tilde{\xi}_{n,k})\,\tfrac{Y_k^3}{n^{3/2}} \;-\; \tfrac{1}{6}\,f'''(\tilde{\tilde{\xi}}_{n,k})\,\tfrac{\phi_k^3}{n^{3/2}}\,\Big]
\end{aligned} \tag{7}$$

Da in den $\xi_{n,k}$ weder das Y_k noch das ϕ_k drin vorkommt, können wir die Erwartungswerte für die k-Variablen bei den Termen erster und zweiter Ordnung direkt an die $Y_k, Y_k^2, \phi_k, \phi_k^2$ ranziehen, diese Variablen kommen in den $f'(\xi_{n,k})$ und $f''(\xi_{n,k})$ nicht vor. Also,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\Big[\,f'(\xi_{n,k})\,\big(\,\tfrac{Y_k}{\sqrt{n}}-\tfrac{\phi_k}{\sqrt{n}}\,\big)\,\Big] \;&=\; \mathsf{E}\big[\,f'(\xi_{n,k})\,\big]\times\big(\,\tfrac{\mathsf{E}[Y_k]}{\sqrt{n}}-\tfrac{\mathsf{E}[\phi_k]}{\sqrt{n}}\,\big) \\
&=\; \mathsf{E}\big[\,f'(\xi_{n,k})\,\big]\times\big(\,\tfrac{0}{\sqrt{n}}-\tfrac{0}{\sqrt{n}}\,\big) \;=\; 0
\end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\mathsf{E}\Big[\, \tfrac{1}{2}\, f''(\xi_{n,k})\,\big(\, \tfrac{Y_k^2}{n} - \tfrac{\phi_k^2}{n}\,\big)\,\Big] \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}\big[\, f''(\xi_{n,k})\,\big] \times \big(\, \tfrac{\mathsf{E}[Y_k^2]}{n} - \tfrac{\mathsf{E}[\phi_k^2]}{n}\,\big)$$

$$=\; \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}\big[\, f''(\xi_{n,k})\,\big] \times \big(\, \tfrac{\mathsf{V}[Y_k]}{n} - \tfrac{\mathsf{V}[\phi_k]}{n}\,\big)$$

$$=\; \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}\big[\, f''(\xi_{n,k})\,\big] \times \big(\, \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n}\,\big) \;=\; 0 \tag{9}$$

Den dritten Erwartungswert in Gleichung (7) schätzen wir ab: Mit $\big|\,\mathsf{E}[X]\,\big| \;\le\; \mathsf{E}\big[\,|X|\,\big]$ erhalten wir

$$\Big|\; \mathsf{E}\Big[\, \tfrac{1}{6}\, f'''(\tilde{\xi}_{n,k})\, \tfrac{Y_k^3}{n^{3/2}} \;-\; \tfrac{1}{6}\, f'''(\tilde{\tilde{\xi}}_{n,k})\, \tfrac{\phi_k^3}{n^{3/2}}\,\Big] \;\Big|$$

$$\le\; \tfrac{1}{6n^{3/2}}\,\mathsf{E}\big[\,|f'''(\tilde{\xi}_{n,k})|\,|Y_k|^3\,\big] \;+\; \tfrac{1}{6n^{3/2}}\,\mathsf{E}\big[\,|f'''(\tilde{\tilde{\xi}}_{n,k})|\,|\phi_k|^3\,\big]$$

$$\le\; \tfrac{1}{6n^{3/2}}\,\max\{|f'''|\}\,\Big\{\, \mathsf{E}\big[\,|Y_k|^3\,\big] \;+\; \mathsf{E}\big[\,|\phi_k|^3\,\big]\,\Big\}$$

$$=:\; \frac{K}{n^{3/2}}$$

mit einer Konstanten

$$K \;:=\; \tfrac{1}{6}\,\max\{|f'''|\}\,\Big\{\, \mathsf{E}\big[\,|Y_1|^3\,\big] \;+\; \mathsf{E}\big[\,|\phi_1|^3\,\big]\,\Big\}$$

Damit erhalten wir dann insgesamt:

$$f(Z_n) \;=\; f(\Phi_n) \;+\; \sum_{k=1}^{n} \Big[\, f\big(\, \xi_{n,k} + \tfrac{Y_k}{\sqrt{n}}\,\big) \;-\; f\big(\, \xi_{n,k} + \tfrac{\phi_k}{\sqrt{n}}\,\big)\,\Big]$$

und

$$\mathsf{E}\big[\, f(Z_n)\,\big] \;=\; \mathsf{E}\big[\, f(\Phi_n)\,\big] \;+\; \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\Big[\, f\big(\, \xi_{n,k} + \tfrac{Y_k}{\sqrt{n}}\,\big) \;-\; f\big(\, \xi_{n,k} + \tfrac{\phi_k}{\sqrt{n}}\,\big)\,\Big]$$

$$=:\; \mathsf{E}\big[\, f(\Phi_n)\,\big] \;+\; \text{Summe}$$

mit

$$\big|\,\text{Summe}\,\big| \;\le\; \sum_{k=1}^{n} \Big|\, \mathsf{E}\Big[\, f\big(\, \xi_{n,k} + \tfrac{Y_k}{\sqrt{n}}\,\big) \;-\; f\big(\, \xi_{n,k} + \tfrac{\phi_k}{\sqrt{n}}\,\big)\,\Big]\,\Big|$$

$$=\; \sum_{k=1}^{n} \Big|\, \mathsf{E}\Big[\, \tfrac{1}{6}\, f'''(\tilde{\xi}_{n,k})\, \tfrac{Y_k^3}{n^{3/2}} \;-\; \tfrac{1}{6}\, f'''(\tilde{\tilde{\xi}}_{n,k})\, \tfrac{\phi_k^3}{n^{3/2}}\,\Big]\,\Big|$$

$$\le\; \sum_{k=1}^{n} \frac{K}{n^{3/2}} \;=\; \frac{K}{n^{1/2}} \;\overset{n\to\infty}{\to}\; 0$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

In der nächsten Veranstaltung werden wir dann den zentralen Grenzwertsatz noch einmal mit einer R-Simulation überprüfen.