week2b: Kapitel 2.1: Erinnerung: Die Normalverteilung und Gauss'sche Integrale

Definition 2.1.1: Eine Zufallsvariable oder Zufallszahl ϕ heisst normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und Standardabweichung $\sigma > 0$, wenn

$$\mathsf{Prob}\big[\, \phi \;\in\; [x, x+dx)\,\big] \;\;=\;\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Die Funktion

$$p(x;\mu,\sigma) \;\;:=\;\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

heisst Dichte der Gauss'schen Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Ist $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, dann sagt man auch, dass ϕ standard-normalverteilt ist.

Bemerkung 2.1.2: In der R-Software bekommt man diese Funktion mit der folgenden Syntax:

$$p(x;\mu,\sigma) \;\;=\;\; \texttt{dnorm}(\texttt{x}, \texttt{mean} = \mu, \texttt{sd} = \sigma)$$

Der Aufrauf `dnorm(x)` ohne eine Angabe von `mean` und `sd` liefert die Standard-Normalverteilung, also

$$\texttt{dnorm}(\texttt{x}) \;\;=\;\; p(x;\mu=0,\sigma=1) \;\;=\;\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Darüber hinaus sind in R ebenfalls die Funktionen

$$\begin{aligned}
\texttt{pnorm}(\texttt{x}, \texttt{mean} = \mu, \texttt{sd} = \sigma) \;\;&:=\;\; \int_{-\infty}^{x} \texttt{dnorm}(\texttt{y}, \texttt{mean} = \mu, \texttt{sd} = \sigma)\, dy \\
&=\;\; \int_{-\infty}^{x} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dy
\end{aligned}$$

und

$$\texttt{qnorm}(\texttt{x}, \texttt{mean} = \mu, \texttt{sd} = \sigma) \;\;:=\;\; \texttt{pnorm}^{-1}(\texttt{x}, \texttt{mean} = \mu, \texttt{sd} = \sigma)$$

vorimplementiert. Dabei meint $\texttt{pnorm}^{-1}$ die Umkehrfunktion von `pnorm`, also definiert durch $y = f(x)$, dann $x = f^{-1}(y) = f^{-1}\big(\, f(x)\,\big)$.

Die folgenden Integrale treten insbesondere in den Finanzmathematik-Vorlesungen recht häufig auf.

Theorem 2.1.3 (Gauss'sche Integrale): Es gelten die folgenden Formeln:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad = \quad \sqrt{2\pi}$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad = \quad 1$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad 1$$

d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad 0$$

e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad 3$$

f) Allgemein, für eine beliebige natürliche Zahl n,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad \begin{cases} (n-1)!! & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit den Doppel-Fakultäten

$$(n-1)!! \quad := \quad (n-1)(n-3)(n-5)\cdots 3 \cdot 1\,.$$

g)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda^2}{2}}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0\,.$$

Beweis: **a)** Mit Polarkoordinaten,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

und

$$dx\,dy \;=\; r\,dr\,d\varphi$$

bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx &= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right\}^{1/2} \\
&= \left\{\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy\right\}^{1/2} \\
&= \left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\,d\varphi\right\}^{1/2} \\
&= \left\{2\pi\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\right\}^{1/2} \\
&= \left\{2\pi\big(-e^{-\frac{r^2}{2}}\big)\Big|_0^{\infty}\right\}^{1/2} \\
&= \sqrt{2\pi}\;.
\end{aligned}$$

b) Folgt direkt aus (a) und der Substitution

$$y \;=\; \frac{x-\mu}{\sigma} \quad\Rightarrow\quad dy \;=\; \frac{dx}{\sigma}$$

denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \;\stackrel{(a)}{=}\; 1\;.$$

c,d,e) Offensichtlich sind die Formeln (c),(d) und (e) Spezialfälle von (f),

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; \begin{cases} (n-1)!! & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

für den Fall $n = 2$, $n = 3$ oder $n = 4$. Also reicht es, den Teil (f) für allgemeines n zu beweisen:

Beweis f) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^n\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^{n-1}}_{=f} \times \underbrace{x\,e^{-\frac{x^2}{2}}}_{=g'}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= x^{n-1}\big(-e^{-\frac{x^2}{2}}\big)\Big|_{-\infty}^{\infty} \;-\; \int_{-\infty}^{\infty} (n-1)x^{n-2}\,\big(-e^{-\frac{x^2}{2}}\big)\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= 0 \;+\; (n-1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{n-2}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Der Exponent hat sich also um 2 reduziert. Das kann man jetzt immer so weiter machen und bekommt

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; (n-1)(n-3)\cdots \begin{cases} 4\cdot 2 \times \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} & \text{if } n \text{ is odd} \\ 3\cdot 1 \times \int_{-\infty}^{\infty} 1\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

$$= \;(n-1)(n-3)\cdots \begin{cases} 4\cdot 2 \times 0 & \text{if } n \text{ is odd} \\ 3\cdot 1 \times 1 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is odd} \\ (n-1)!! & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

und der Teil (f) ist bewiesen.

Beweis g) Wenn wir die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda^2}{2}}\;,$$

mit $\sqrt{\alpha}\, e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda^2}{2}}$ multiplizieren, bekommen wir

$$\sqrt{\alpha}\, e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 1\;.$$

Dass das richtig ist, können wir wieder mit Teil (a) zeigen, denn

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda^2}{2}}\, e^{\lambda x}\, e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;&=\; \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\frac{x^2}{2} + \lambda x - \frac{\lambda^2}{2\alpha}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&=\; \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}(x^2 - 2\frac{\lambda}{\alpha}x + \frac{\lambda^2}{\alpha^2})}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&=\; \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}(x - \frac{\lambda}{\alpha})^2}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&\overset{y=x-\lambda/\alpha}{=}\; \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}y^2}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&\overset{v=\sqrt{\alpha}y}{=}\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2}\, \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} \\
&\overset{(a)}{=}\; 1
\end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Mit dem folgenden Theorem 2.1.4 können wir in der nächsten Veranstaltung zeigen, dass die Summe von n unabhängigen normalverteilten Zufallszahlen selbst wieder normalverteilt ist (nicht erst im Limes $n \to \infty$). Das wird dann ein wesentliches Hilfsmittel sein beim Beweis des zentralen Grenzwertsatzes.

Theorem 2.1.4: Mit der Notation

$$p_t(x,y) \quad := \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

gilt die folgende Formel:

$$\int_{\mathbb{R}} p_s(x,y)\, p_t(y,z)\, dy \quad = \quad p_{s+t}(x,z) \quad .$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned}
p_s(x,y)p_t(y,z) &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-(\frac{1}{2s}+\frac{1}{2t})y^2+(\frac{x}{s}+\frac{z}{t})y} \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{s+t}{2st}(y^2-2\frac{xt+zs}{s+t}y)} \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2} e^{\frac{s+t}{2st}(\frac{xt+zs}{s+t})^2} \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2} e^{\frac{(xt+zs)^2}{2st(s+t)}} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-x^2(\frac{1}{2s}-\frac{t}{2s(s+t)})-z^2(\frac{1}{2t}-\frac{s}{2t(s+t)})+\frac{xz}{s+t}}\; e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{x^2}{2(s+t)}-\frac{z^2}{2(s+t)}+\frac{xz}{s+t}}\; e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}}\; e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2}
\end{aligned}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} p_s(x,y)p_t(y,z)\, dy &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2} dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s+t}{2st}v^2} dv \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\; e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}}\; \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{st}{s+t}} \\
&= p_{s+t}(x,z)
\end{aligned}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Bemerkung 2.1.5: Die Formel aus Theorem 2.1.4 ist sehr wichtig für die Berechnung von Erwartungswerten, in denen die Brownsche Bewegung auftritt. Die Brownsche Bewegung ist unter anderem Bestandteil des Black-Scholes Modells in stetiger Zeit, ein Standard-Modell in der Finanzmathematik, und Erwartungswerte bekommt man dann beim Berechnen von Optionspreisen.

Definition 2.1.6: Das Integral $\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$ lässt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken, man kann es nicht explizit ausintegrieren. Da diese Funktion als kummulierte Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung natürlich sehr wichtig ist, bekommt sie deshalb einen eigenen Buchstaben, meistens ein $N(x)$ oder ein Gross-Phi, also $\Phi(x)$. In dieser Veranstaltung wollen wir das N benutzen, also wir definieren

$$N(x) \quad := \quad \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \quad .$$