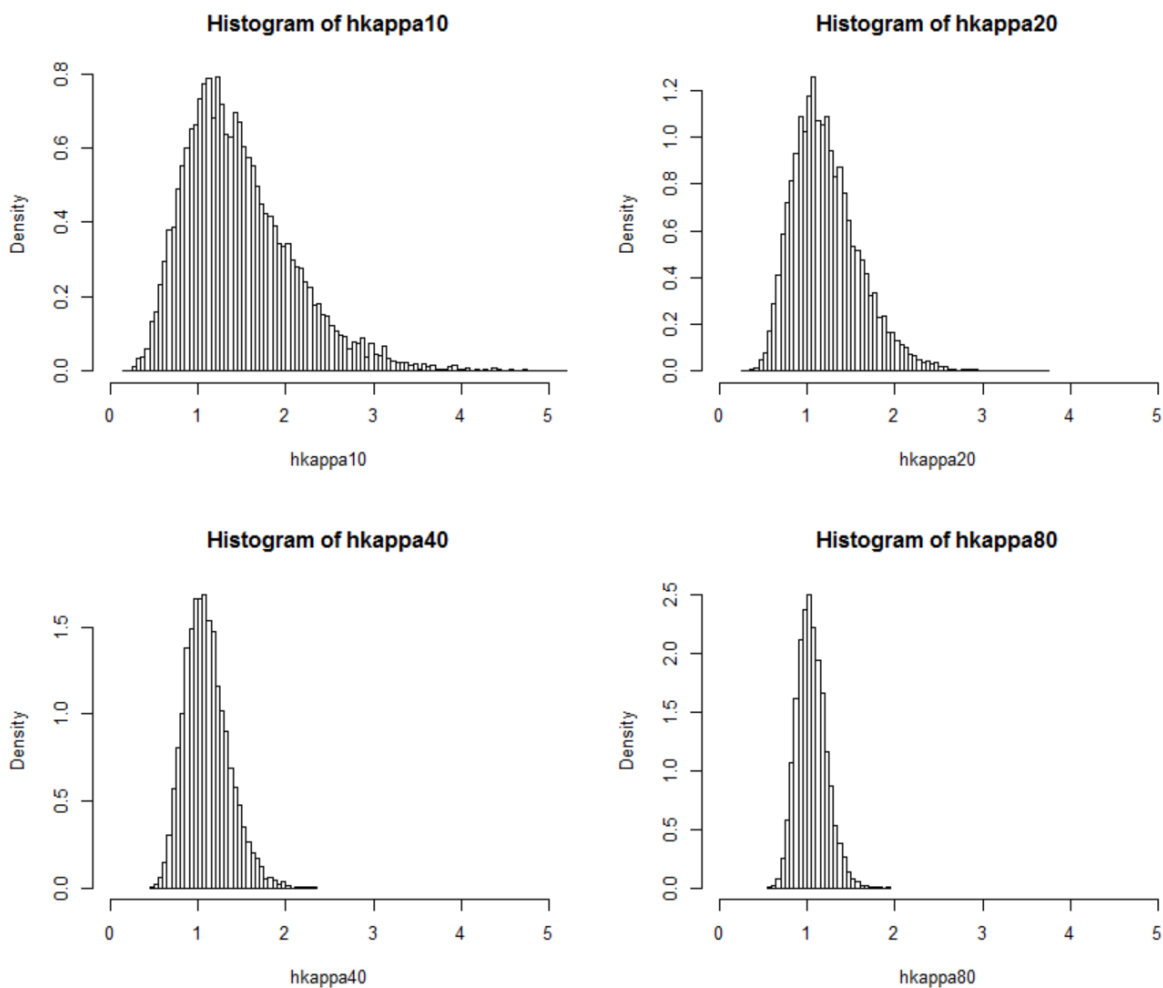


**week13: Die Cramer-Rao Abschätzung für den OU-Prozess,
 R-Simulation**

Letzte Woche hatten wir die Cramer-Rao Abschätzung für das Beispiel 3, den zeitdiskreten Ornstein-Uhlenbeck Prozess, explizit hingeschrieben und waren auf die folgende Abschätzung für die Varianz von $\hat{\kappa}$ gekommen, wenn $\hat{\kappa}$ ein beliebiger erwartungstreuer Schätzer für den Modellparameter κ , das war die mean reversion speed, ist:

$$V[\hat{\kappa}] \geq \frac{4\kappa^2}{2\kappa T - 1 + e^{-2\kappa T}} \stackrel{\kappa T \gg 1}{\approx} \frac{4\kappa^2}{2\kappa T} = \frac{2\kappa}{T} \quad (1)$$

Wenn der Zeithorizont T nach unendlich geht, geht die untere Schranke also nach 0. Das muss natürlich noch nicht bedeuten, dass die Varianz des Maximum-Likelihood-Schätzers $\hat{\kappa}_{ML}$ ebenfalls nach 0 geht, zumal dieser Schätzer ja auch gar nicht erwartungstreu ist, aber das ist genau das, was passiert. Wir wollen dazu die folgenden Bilder und Zahlen reproduzieren:



```

> summary(hkappa10)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.1702  1.0200  1.3648  1.4700  1.8130  5.8170
> summary(hkappa20)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.2895  0.9433  1.1630  1.2183  1.4348  3.7119
> summary(hkappa40)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.4578  0.9248  1.0758  1.1020  1.2508  2.3265
> summary(hkappa80)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.5855  0.9344  1.0379  1.0518  1.1558  1.9286

```

Für grosse T wird das $\hat{\kappa}_{ML}$ also immer genauer. Es wurden im wesentlichen dieselben Parameterwerte wie in dem week9a.pdf gewählt, das waren:

$$(\kappa, \mu, \sigma) = (1, 5, 1)$$

$$N = 10000 \text{ Anzahl der Pfade}$$

und hier jetzt

$$T \in \{10, 20, 40, 80\}$$

wobei für jedes T immer dieselbe Anzahl von $n = 10000$ Zeitschritten, die Anzahl der dt 's, genommen wurde, jeder Schätzer benutzt also exakt dieselbe Anzahl von $n = 10000$ Zeitreihendaten $\{x_{t_k}\}_{k=0}^n$.

