week12b: Kapitel 7: Effizienz von Schätzern, Teil 4
Die Cramer-Rao Abschätzung für das Beispiel 3, Fortsetzung

Wir hatten den zeitdiskrete Ornstein-Uhlenbeck Prozess oder kurz OU-Prozess

$$x_{t_k} \;=\; x_{t_{k-1}} \,+\, \kappa(\mu - x_{t_{k-1}})\Delta t \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x_{t_k} \;=\; \alpha\, x_{t_{k-1}} \,+\, \beta \,+\, \eta\,\phi_k \tag{2}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &:= 1 \,-\, \kappa\Delta t \\ \beta &:= \kappa\mu\Delta t \\ \eta &:= \sigma\sqrt{\Delta t} \end{aligned} \tag{3}$$

oder

$$\begin{aligned} \kappa &= \tfrac{1-\alpha}{\Delta t} \\ \mu &= \tfrac{\beta}{1-\alpha} \\ \sigma^2 &= \tfrac{\eta^2}{\Delta t} \end{aligned} \tag{4}$$

betrachtet mit W'keitsdichte oder Likelihood-Funktion (mit $x_k \equiv x_{t_k}$)

$$p_\theta(x) \;=\; p_{\alpha,\beta,\eta}(x_1,\cdots,x_n) \;=\; \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}}\, e^{-\frac{(\,x_k - [\alpha x_{k-1}+\beta]\,)^2}{2\eta^2}} \right\} \tag{5}$$

Die Cramer-Rao Abschätzung war dann gegeben durch

$$\mathsf{V}[\,\hat\theta_k\,] \;\geq\; \left[\, I^{-1}(\theta)\,\right]_{k,k} \tag{6}$$

mit der Fisher-Informationsmatrix

$$I(\theta) \;=\; \left(-\,\mathsf{E}\left[\tfrac{\partial^2 \log p_\theta}{\partial\theta_k\partial\theta_\ell}\right] \right)_{k,\ell=1,\ldots,m} \;\in\; \mathbb{R}^{m\times m} \tag{7}$$

In unserem Fall war $m=3$ und

$$\theta \;=\; (\theta_1,\theta_2,\theta_3) \;=\; (\alpha,\beta,\eta^2) \;=:\; (\alpha,\beta,\nu)$$

Am Dienstag hatten wir das $I(\theta)$ berechnet, es war

$$
\begin{aligned}
I(\theta) \;&=\; \frac{n}{\nu}\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}[\,x_{k-1}^2\,] & \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}[\,x_{k-1}\,] & 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}[\,x_{k-1}\,] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\nu} \end{pmatrix} \\
&=:\; \frac{n}{\nu}\begin{pmatrix} \langle x^2\rangle_T & \langle x\rangle_T & 0 \\ \langle x\rangle_T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\nu} \end{pmatrix} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

mit den Grössen (mit $T = t_n = n\Delta t$)

$$\langle x^2\rangle_T \;:=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}[\,x_{k-1}^2\,] \;=\; \frac{1}{n\Delta t}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}[\,x_{t_{k-1}}^2\,]\,\Delta t \;\overset{\Delta t\to 0}{\approx}\; \frac{1}{T}\int_0^T \mathsf{E}[\,x_t^2\,]\,dt \qquad (9)$$

und analog

$$\langle x\rangle_T \;:=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}[\,x_{k-1}\,] \;=\; \frac{1}{n\Delta t}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}[\,x_{t_{k-1}}\,]\,\Delta t \;\overset{\Delta t\to 0}{\approx}\; \frac{1}{T}\int_0^T \mathsf{E}[\,x_t\,]\,dt \qquad (10)$$

Das Inverse von $I(\theta)$ ist jetzt kein Problem mehr (mit $\langle\,\cdot\,\rangle \equiv \langle\,\cdot\,\rangle_T$):

$$I^{-1}(\theta) \;=\; \frac{\nu}{n}\begin{pmatrix} \frac{1}{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2} & -\frac{\langle x\rangle}{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2} & 0 \\ -\frac{\langle x\rangle}{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2} & \frac{\langle x^2\rangle}{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu \end{pmatrix} \qquad (11)$$

und die Cramer-Rao Abschätzung liefert dann die folgenden unteren Schranken für alle erwartungstreuen Schätzer $\hat\alpha, \hat\beta$ und $\hat\nu$:

$$\mathsf{V}[\hat\alpha] \;\geq\; \frac{\nu}{n}\,\frac{1}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \qquad (12)$$

$$\mathsf{V}[\hat\beta] \;\geq\; \frac{\nu}{n}\,\frac{\langle x^2\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \qquad (13)$$

$$\mathsf{V}[\hat\nu] \;\geq\; \frac{2\nu^2}{n} \qquad (14)$$

Die Gössen $\langle x^2\rangle$ und $\langle x\rangle^2$ berechnen wir in dem folgenden Lemma:

Lemma 7.3.1: Die $\{x_{t_k}\}_{k=1}^n$ seien gegeben durch einen zeitdiskreten OU-Prozess (1) oder (2) mit $T = n\Delta t$ und die Grössen $\langle x\rangle_T$ und $\langle x^2\rangle_T$ seien definiert durch (9) und (10) weiter oben. Der Startwert x_0 des OU-Prozesses sei gegeben durch den Mean Reversion Level μ, also $x_0 := \mu$. Dann gilt im Limes $\Delta t \to 0$:

$$\langle x \rangle_T \;=\; \mu \tag{15}$$

$$\langle x^2 \rangle_T \;\overset{\Delta t\to 0}{\approx}\; \mu^2 \;+\; \frac{\sigma^2}{2\kappa T}\,\frac{2\kappa T - 1 + e^{-2\kappa T}}{2\kappa} \tag{16}$$

Insbesondere,

$$\langle x^2 \rangle_T \;-\; \langle x \rangle_T^2 \;\overset{\Delta t\to 0}{\approx}\; \frac{\sigma^2}{2\kappa T}\,\frac{2\kappa T - 1 + e^{-2\kappa T}}{2\kappa} \tag{17}$$

Beweis: Die wesentliche Arbeit haben wir schon in dem Lemma 5.3.2 im week8b gemacht, das war die folgende Aussage:

Lemma 5.3.2: Es sei $\{x_{t_k}\}$ ein zeitdiskreter Ornstein-Uhlenbeck Prozess gegeben durch (1) oder (2). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,x_{t_k}\,] \;&=\; \mu \;+\; (x_0-\mu)\,(1-\kappa\Delta t)^k \\
\mathsf{V}[\,x_{t_k}\,] \;&=\; \frac{\sigma^2}{\kappa}\,\frac{1-(1-\kappa\Delta t)^{2k}}{2-\kappa\Delta t}
\end{aligned}$$

Insbesondere im Kontinuumslimes $\Delta t \to 0$, $k \to \infty$ mit $t_k = k\Delta t =: t$ fest:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0} \mathsf{E}[\,x_t\,] \;&=\; \mu \;+\; (x_0-\mu)\,e^{-\kappa t} \\
\lim_{\Delta t\to 0} \mathsf{V}[\,x_t\,] \;&=\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t})
\end{aligned}$$

Mit $x_0 = \mu$ haben wir dann also im Limes $\Delta t \to 0$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,x_t\,] \;&=\; \mu \\
\mathsf{V}[\,x_t\,] \;&=\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t}) \;=\; \mathsf{E}[\,x_t^2\,] \;-\; (\,\mathsf{E}[\,x_t\,]\,)^2 \;=\; \mathsf{E}[\,x_t^2\,] \;-\; \mu^2
\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle_T \;&=\; \frac{1}{T}\int_0^T \mathsf{E}[\,x_t\,]\,dt \;=\; \mu \\
\langle x^2 \rangle_T \;&=\; \frac{1}{T}\int_0^T \mathsf{E}[\,x_t^2\,]\,dt \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T \Big\{\, \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t}) \;+\; \mu^2 \,\Big\}\,dt \\
&=\; \frac{\sigma^2}{2\kappa T}\,\big(\,T - \frac{1-e^{-2\kappa T}}{2\kappa}\,\big) \;+\; \mu^2
\end{aligned}$$

und damit

$$\langle x^2 \rangle_T \;-\; \langle x \rangle_T^2 \;=\; \frac{\sigma^2}{2\kappa T}\,\big(\,T - \frac{1-e^{-2\kappa T}}{2\kappa}\,\big) \;=\; \frac{\sigma^2}{2\kappa T}\,\frac{2\kappa T - 1 + e^{-2\kappa T}}{2\kappa}$$

und das Lemma 7.3.1 ist bewiesen. $\blacksquare$

Jetzt schauen wir uns die Schätzer für die 'ursprünglichen' Modellparameter (κ, μ, σ) an. Der Zusammenhang zu den 'abgeleiteten' Modellparametern $(\alpha, \beta, \nu = \eta^2)$ war gegeben durch (4), das waren die Gleichungen

$$\begin{aligned} \kappa &= \tfrac{1-\alpha}{\Delta t} \\ \mu &= \tfrac{\beta}{1-\alpha} \\ \sigma^2 &= \tfrac{\nu}{\Delta t} \end{aligned}$$

'Ursprünglich' meint hier, dass diese Parameter unabhängig von der Zeitdiskretisierung Δt sind und die abgeleiteten Modellparameter hängen dann von dem Δt ab. Wenn wir also das κ mit

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{\Delta t}\,(1 - \hat{\alpha}) \tag{18}$$

mit einem erwartungstreuen $\hat{\alpha}$ schätzen, dann bekommen wir notwendigerweise

$$\begin{aligned} \mathsf{V}[\,\hat{\kappa}\,] &= \mathsf{V}\left[\,\frac{1}{\Delta t}\,(1 - \hat{\alpha})\,\right] \\ &= \frac{1}{(\Delta t)^2} \times \mathsf{V}[\,1 - \hat{\alpha}\,] \\ &= \frac{1}{(\Delta t)^2} \times \mathsf{V}[\,\hat{\alpha}\,] \\ &\overset{\text{Cramer−Rao (12)}}{\geq} \frac{1}{(\Delta t)^2} \times \frac{\nu}{n}\,\frac{1}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \\ &= \frac{1}{(\Delta t)^2} \times \frac{\sigma^2 \Delta t}{n} \times \frac{1}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{T} \times \frac{1}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \\ &\overset{\Delta t \to 0}{=} \frac{\sigma^2}{T} \times \frac{1}{\frac{\sigma^2}{2\kappa T}\,\frac{2\kappa T - 1 + e^{-2\kappa T}}{2\kappa}} \\ &= \frac{4\kappa^2}{2\kappa T - 1 + e^{-2\kappa T}} \end{aligned} \tag{19}$$

und dieser Ausdruck geht also nicht nach 0 auch wenn das $\Delta t \to 0$ geht und das $n = T/\Delta t \to \infty$ geht. Ein erwartungstreuer Schätzer für das κ kann also erst im Limes $T \to \infty$ konsistent werden, erst im Limes grosser T kann seine Varianz beliebig klein gemacht werden. Für festes T ist die Varianz immer grösser oder gleich einem festem positiven Wert, gegeben durch die rechte Seite von (19).

Schauen wir uns die Schätzer für das σ^2 an, die sind gegeben durch

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{\Delta t}\,\hat{\nu} \tag{20}$$

und die Cramer-Rao Abschätzung liefert in diesem Fall

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}[\,\widehat{\sigma^2}\,] &= \mathsf{V}\left[\,\frac{1}{\Delta t}\,\hat{\nu}\,\right] \\
&= \frac{1}{(\Delta t)^2} \times \mathsf{V}[\hat{\nu}] \\
&\overset{\text{Cramer}-\text{Rao (14)}}{\geq} \frac{1}{(\Delta t)^2} \times \frac{2\nu^2}{n} \\
&= \frac{1}{(\Delta t)^2} \times \frac{2\,(\sigma^2\Delta t)^2}{n} \\
&= \frac{2\sigma^4}{n}
\end{aligned} \tag{21}$$

und in diesem Fall geht die untere Schranke, die rechte Seite von (21), nach 0 wenn n nach unendlich oder Δt nach 0 geht. Das deckt sich also genau mit dem Verhalten, was wir im week9a.pdf beobachtet haben.