Hochschule RheinMain SS 2023
Prof. Dr. D. Lehmann

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Stochastik II

Aufgabe 1) Wir betrachten noch einmal das Setting der ersten Aufgabe vom letzten Übungsblatt 8: Zufallszahlen $\{x_i\}_{i=1}^n$ heissen exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn für alle $x \geq 0$

$$\mathsf{Prob}\big[\, x_i \in [x, x+dx) \,\big] \;=\; \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$$

gilt und die Wahrscheinlichkeit für negative Zahlen 0 ist, also $\mathsf{Prob}[\, x_i \in [x, x+dx) \,] \;=\; 0$ falls $x < 0$. In Teil (c) hatten wir den Maximum Likelihood Schätzer für das λ hergeleitet:

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \;=\; \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i} \tag{1}$$

Zeigen Sie jetzt: Der Maximum Likelihood Schätzer (1) ist nicht erwartungstreu, aber der modifizierte Schätzer

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{etreu}}(x_1, ..., x_n) \;:=\; \frac{1}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n x_i} \tag{2}$$

ist erwartungstreu. Zum Beweis benötigen Sie die folgenden Formeln (i) und (ii), die Sie zunächst vielleicht einfach so benutzen tun, ohne Beweis (nicht klausurrelevant):

i) Für jede Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \;=\; \int_0^\infty f(y)\, \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\, dy$$

ii) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt: $\int_0^\infty y^m\, e^{-y}\, dy \;=\; m!$.

Aufgabe 2 (Convexity Adjustment): Es sei x eine zufällige Grösse, von der wir in der Lage sind, den Erwartungswert zu berechnen, das heisst, die Grösse $\mathsf{E}[x]$ ist bekannt. Es sei nun

$$F \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

eine gegebene Funktion, die so kompliziert ist, dass wir $\mathsf{E}[F(x)]$ nicht direkt berechnen können. Leiten Sie die folgende Näherungsformel her:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\big[\, F(x) \,\big] \;&=\; F\big(\mathsf{E}[x]\big) \;+\; \frac{1}{2}\, F''\big(\mathsf{E}[x]\big)\, \mathsf{V}[x] \;+\; O\Big(\mathsf{E}\big[\, (x - \mathsf{E}[x])^3 \,\big] \Big) \\ &\approx\; F\big(\mathsf{E}[x]\big) \;+\; \frac{1}{2}\, F''\big(\mathsf{E}[x]\big)\, \mathsf{V}[x] \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathsf{V}[x] = \mathsf{E}[\, (x - \mathsf{E}[x])^2 \,]$ die Varianz von x.