

8. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastik II

Aufgabe 1) Zufallszahlen $\{x_i\}_{i=1}^n$ heißen exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn für alle $x \geq 0$

$$\text{Prob}[x_i \in [x, x + dx)] = \lambda e^{-\lambda x} dx$$

gilt und die Wahrscheinlichkeit für negative Zahlen 0 ist, also $\text{Prob}[x_i \in [x, x + dx)] = 0$ falls $x < 0$.

- a) Es sei x eine mit Parameter $\lambda > 0$ exponential-verteilte Zufallszahl. Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert von x gilt: $E[x] = \frac{1}{\lambda}$.
- b) Gegeben seien Zufallszahlen x_1, x_2, \dots, x_n , die durch eine Exponentialverteilung mit Parameter λ erzeugt worden sind, wir kennen jedoch den konkreten Wert für λ nicht. Wir möchten das λ mit Hilfe der Maximum Likelihood Methode schätzen. Stellen Sie dazu die Likelihood-Funktion $L = L(\lambda)$ auf. Berechnen Sie ebenfalls den Logarithmus $\log L(\lambda)$ und vereinfachen Sie das Resultat soweit wie möglich.
- c) Zeigen Sie, dass der Maximum Likelihood Schätzer für λ gegeben ist durch

$$\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$$

Bestimmen Sie dazu das Maximum von $\log L(\lambda)$.

Aufgabe 2) Wir betrachten den zeitdiskreten Ornstein-Uhlenbeck oder OU-Prozess aus dem Beispiel 3 aus der Vorlesung, gegeben durch ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} x_{t_k} &= x_{t_{k-1}} + \kappa(\mu - x_{t_{k-1}})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\phi_k \\ &= \alpha x_{t_{k-1}} + \beta + \eta\phi_k \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \kappa \Delta t \\ \beta &= \kappa \mu \Delta t \\ \eta &= \sigma \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ und Startwert $x_{t_0} = \mu$. In der Vorlesung haben wir in dem week9a.pdf in den Gleichungen (8-10) die Maximum Likelihood Schätzer für die Modellparameter (κ, μ, σ) angegeben. Reproduzieren Sie die Histogramme und die Summary-Daten für $(\hat{\kappa}_{\text{ML}}, \hat{\mu}_{\text{ML}}, \hat{\sigma}_{\text{ML}})$, die auf den Seiten 6, 7 und 8 im week9a.pdf abgebildet sind.