Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2023

7. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastik II

Aufgabe 1) Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus dem week8b.pdf:

a) Gegeben sei die Zahl α und die Zahlenfolge $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dann gilt: Die Rekursion

$$x_k \;=\; \alpha\, x_{k-1} \;+\; c_k \;, \qquad k = 1, 2, ... \tag{1}$$

mit Startwert x_0 wird gelöst von

$$x_k \;=\; \alpha^k x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k} c_j\, \alpha^{k-j} \tag{2}$$

b) Die Rekursion (mit $t_k = k\Delta t$)

$$\Delta X_{t_k} \;:=\; X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \;=\; \kappa(\mu - X_{t_{k-1}})\,\Delta t \tag{3}$$

mit Konstanten κ und μ wird gelöst von

$$X_{t_k} \;=\; \mu \;+\; (X_0 - \mu)\,(1 - \kappa\Delta t)^k \;=\; \mu \;+\; (X_0 - \mu)\,\big(1 - \tfrac{\kappa t_k}{k}\big)^k \tag{4}$$

c) Die stochastische Rekursion für den zeitdiskreten Ornstein-Uhlenbeck Prozess

$$X_{t_k} \;=\; X_{t_{k-1}} \;+\; \kappa(\mu - X_{t_{k-1}})\,\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \tag{5}$$

wird gelöst durch

$$X_{t_k} \;=\; \mu \;+\; (X_0 - \mu)\,(1 - \kappa\Delta t)^k \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k} \phi_j\,(1 - \kappa\Delta t)^{k-j} \tag{6}$$

Aufgabe 2) Beweisen Sie das Lemma 5.3.2 aus der Vorlesung, das war die folgende Aussage: Es sei $\{X_{t_k}\}$ ein zeitdiskreter Ornstein-Uhlenbeck Prozess gegeben durch (5) oder (6). Dann gilt:

$$\mathsf{E}[\,X_{t_k}\,] \;=\; \mu \;+\; (X_0 - \mu)\,(1 - \kappa\Delta t)^k \tag{7}$$

$$\mathsf{V}[\,X_{t_k}\,] \;=\; \frac{\sigma^2}{\kappa}\,\frac{1 - (1 - \kappa\Delta t)^{2k}}{2 - \kappa\Delta t} \tag{8}$$

Insbesondere im Kontinuumslimes $\Delta t \to 0$, $k \to \infty$ mit $t_k = k\Delta t =: t$ fest, gilt:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathsf{E}[\,X_t\,] \;=\; \mu \;+\; (X_0 - \mu)\,e^{-\kappa t} \tag{9}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathsf{V}[\,X_t\,] \;=\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,(1 - e^{-2\kappa t}) \tag{10}$$

Aufgabe 3) Überprüfen Sie die Formeln aus Aufgabe 2 durch eine geeignete R-Simulation.