

6. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastik II

Aufgabe 1) Gegeben sei das Integral

$$I := \int_{-1}^2 e^{-x^2} dx$$

- a) Berechnen Sie den numerischen Wert von I mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie normalverteilte (aber nicht notwendig standard-normalverteilte) Zufallszahlen verwenden. Mit den Notationen und Definitionen von dem `week7a.pdf`, was genau ist F und was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?
- b) Berechnen Sie den numerischen Wert von I mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie uniforme oder gleichverteilte (aber nicht notwendig auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte) Zufallszahlen benutzen. Was wäre in diesem Fall das F und die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?

Ihre Resultate aus (a) und (b) sollten natürlich, bis auf random noise, übereinstimmen, also achten Sie auf eventuelle Vorfaktoren wie $1/\sqrt{\pi}$ oder $1/3$ (wo kommen die her?). Wenn Sie Ihr Ergebnis gegen eine exakte Formel gegenchecken wollen, könnten Sie auch noch versuchen, das I mit Hilfe der Funktion

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

auszudrücken, das $\Phi(x)$ bekommen Sie in R mit der Syntax `pnorm(x)` .

Aufgabe 2) Überprüfen Sie für die Werte von, sagen wir, $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ die Formel

$$\int_{[0,1]^n} \chi(0 \leq x_1 + \dots + x_n \leq 1) d^n x = \frac{1}{n!}$$

mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie gleichverteilte Zufallszahlen verwenden. Die χ -Funktion oder Indikator-Funktion ist wie üblich definiert durch

$$\chi(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } A = \text{true} \\ 0 & \text{falls } A = \text{false} . \end{cases}$$

Mit den Notationen und Definitionen von dem `week7a.pdf`, was genau ist F und was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?

..*bitte wenden*

Aufgabe 3) Berechnen Sie die folgenden Integrale numerisch mit einer Monte Carlo Simulation:

a) $\int_{\mathbb{R}} \log(\phi^2) e^{-\frac{\phi^2}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi}}$

b) $\int_0^\infty (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) e^{-2x} dx$

c) $\int_0^{1/2} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) e^{-2x} dx$

d) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |x - y| dx dy$

Bemerkung: Bevor Sie die Sachen auf diesem Üblatt mit Monte Carlo berechnen können, müssen Sie meistens eine kleine Umformung machen, damit die Integrale auch wirklich von der Form

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} F(\phi) p(\phi) d^n \phi$$

sind mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(\phi) d^n \phi \stackrel{!}{=} 1$$

wie in dem `week7a.pdf`. Es wäre gut, wenn Sie sich diese kleine Umformung jeweils genau klar machen könnten. Also wenn das Integral über das p etwa keine 1 ergibt, sondern eine 3, dann kann man auch schreiben $F(\phi) p(\phi) = 3F(\phi) \frac{1}{3}p(\phi)$ und das $\frac{1}{3}p(\phi)$ wäre dann also die W'keitsdichte. Mit anderen Worten, das F bekommt dann einen zusätzlichen Faktor 3.