Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

SS 2023

# 4. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastik II

**Aufgabe 1)** Zufallszahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ heissen $\chi^2$-verteilt mit $n$ Freiheitsgraden oder kurz $\chi_n^2$-verteilt, wenn

$$\mathsf{Prob}\big[\, \xi_i \in (\xi, \xi + d\xi)\,\big] \;=\; p_{\chi_n^2}(\xi)\, d\xi$$

mit der Dichte

$$p_{\chi_n^2}(\xi) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\, \xi^{n/2-1}\, e^{-\xi/2} & \text{für } \xi > 0 \\ 0 & \text{für } \xi \leq 0 \end{cases}$$

Dabei ist die Gamma-Funktion gegeben durch (für $x > 0$)

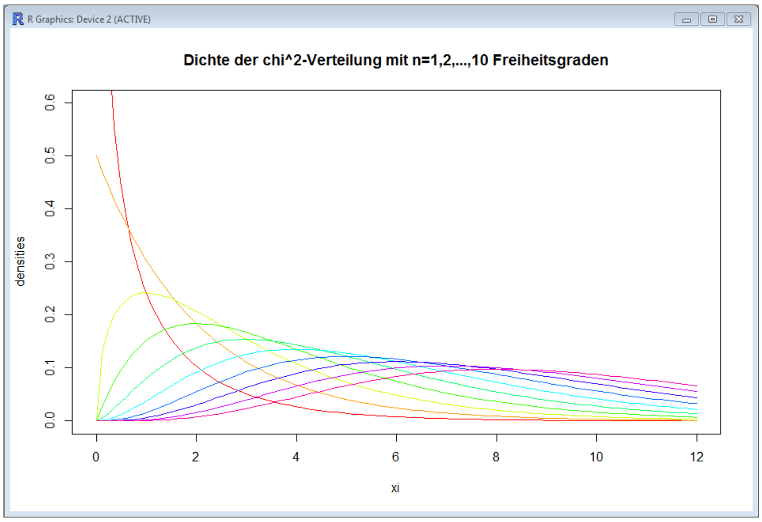
$$\Gamma(x) \;=\; \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt\ .$$

Es gilt die folgende Aussage $A(n)$: Sind $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ standard-normalverteilte Zufallszahlen, dann hat die Zufallszahl

$$\xi \;:=\; \phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_n^2$$

eine $\chi_n^2$-Verteilung. Diese Aussage wollen wir in dieser Aufgabe mit einer R-Simulation überprüfen. Starten Sie dazu eine R-Session und führen Sie folgende Berechnungen durch:

**a)** Versuchen Sie, das folgende Bild zu reproduzieren (in schwarz-weiss ist auch okay..):




Schauen Sie sich dazu wieder das pdf-file

`http://hsrm-mathematik.de/SS2023/semester4/Stochastik2/W'keitsverteilungen-in-R.pdf`

an, um die Syntax für die Dichte-Funktionen $p_{\chi_n^2}(\xi)$ herauszufinden. Wenn Sie die Kurven bunt machen wollen, können Sie sich etwa zur R-Farbpalette `rainbow()` informieren.

**b)** Legen Sie die Variablen $n = 5$ und $N = 10000$ (R unterscheidet Gross- und Kleinbuchstaben) an und erzeugen Sie dann $n \times N$ standardnormalverteilte Zufallszahlen (mean=0, sd=1). Speichern Sie diese Zufallszahlen in einer Matrix

$$\text{Phi} \;:=\; \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \\ \phi_{n+1} & \phi_{n+2} & \cdots & \phi_{2n} \\ \phi_{2n+1} & \phi_{2n+2} & \cdots & \phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{(N-1)n+1} & \phi_{(N-1)n+2} & \cdots & \phi_{Nn} \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{N\times n}$$

Berechnen Sie dann die Matrix

$$\text{PhiSquared} \;:=\; \begin{pmatrix} \phi_1^2 & \phi_2^2 & \cdots & \phi_n^2 \\ \phi_{n+1}^2 & \phi_{n+2}^2 & \cdots & \phi_{2n}^2 \\ \phi_{2n+1}^2 & \phi_{2n+2}^2 & \cdots & \phi_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{(N-1)n+1}^2 & \phi_{(N-1)n+2}^2 & \cdots & \phi_{Nn}^2 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{N\times n}$$

**c)** Benutzen Sie jetzt etwa den Befehl `rowSums()`, um den Vektor

$$\xi \;=\; \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_n^2 \\ \phi_{n+1}^2 + \phi_{n+2}^2 + \cdots + \phi_{2n}^2 \\ \phi_{2n+1}^2 + \phi_{2n+2}^2 + \cdots + \phi_{3n}^2 \\ \vdots \\ \phi_{(N-1)n+1}^2 + \phi_{(N-1)n+2}^2 + \cdots + \phi_{Nn}^2 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^N$$

zu generieren. Erstellen Sie ein Histogramm der relativen Häufigkeiten der Zufallszahlen $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$, indem Sie den Befehl `hist(ξ,prob=TRUE,breaks=20)` eingeben.

**d)** Stellen Sie in dem Plot aus (c) jetzt ebenfalls einen Plot der Dichte-Funktion $p_{\chi_n^2}$, etwa in rot, dar. Das Histogramm und diese Dichte-Funktion sollten dann also in etwa übereinstimmen.

**e)** Codieren Sie jetzt einen Loop über die Werte von

$$n \;\in\; \{1, 2, \cdots, 10\}$$

um nicht nur die Aussage $A(5)$, sondern alle Aussagen $A(1), \cdots, A(10)$ zu überprüfen.